Ein Teleportationsmodell in Quantenbit-Räumen

Ergebnisse der Diplomarbeit
„GRUPPEN UNITÄRER OPERATOREN UND VOLLSTÄNDIGE ORTHONORMALSYSTEME“
FU Hagen / FSU Jena 2002

Johannes Wollbold
eMail jwollbold@gmx.de
Homepage www.jwollbold.de

31. Januar 2005

Einführung

„Wenn es dich überrascht, dann hast du es noch nicht verstanden.“

(Ludwig Wittgenstein, Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.)

Einstein / Podolsky / Rosen 1935: Quantenmechanik ist vollständig $\Rightarrow$ 2 Größen entsprechend nicht kommutierender Operatoren können gleichzeitig genau gemessen werden.
Voraussetzung: Messung an Teilsystem eines verschränkten Zustands beeinflusst ein entferntes Teilsystem nicht.

Bell 1964: Kausale und lokale Theorie $\Rightarrow$ Widerspruch zu den statistischen Voraussagen der Quantenmechanik.

EPR-Paradoxon
$\rightarrow$ EPR-Effekt
$\rightarrow$ Teleportation: **Bennett e.a. 1993**

Grundbegriffe

Endlichdimensionaler Hilbertraum $L_2(\{0,1\}^n)$ - Spin oder Polarisation, dim $N = n^2$.

Normaler Zustand: $\exists$ positiver Spuroporator ρ (Dichtematrix) mit tr$(\rho) = 1$, so dass

$$\omega(A) = \mathrm{tr}(\rho A) \qquad A \in \mathfrak{A}$$

$\omega(A)$ ist Erwartungswert der Observablen A im **"Zustand"** ρ.
Reiner Zustand zu $f \in L_2(\{0,1\}^n)$: $| f >< f|$.

$(\gamma_j)_{j=1}^N$ vollständiges Orthonormalsystem in $L_2(\{0,1\}^n)$
Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren $A = \sum_{j=1}^N z_j | \gamma_j >< \gamma_j|$

Strukturen auf Qubit-Räumen

Orthonormalbasen und unitäre Operatoren

Satz: Es seien $(\Omega, \oplus)$ eine endliche abelsche Gruppe und $(\gamma_m)_{m\in\Omega}$ eine Orthonormalbasis in $L_2(\Omega)$. Dann existiert zu jedem $k \in \Omega$ genau ein linearer Operator U_k auf $L_2(\Omega)$, so dass für alle $m \in \Omega$ gilt

$$U_k^* \gamma_m = \gamma_{m\oplus k}$$

Die so definierten Operatoren U_k sind unitär und bilden eine parametrisierte Gruppe $(U_k)_{k\in\Omega} \cong \Omega$.

Beispiele

- $\Omega = \{0,1\}^n$ mit komponentenweiser Addition $\oplus$, $(\Delta_m)_{m\in\Omega}$ die Einheitsbasis in $L_2(\Omega)$.

$$U_k^* \Delta_m = \Delta_{m\oplus k}$$

$$U_k f(j) = f(j \oplus k)$$

- $\Omega := \{0, ..., N-1\}$ mit Addition mod N, $(b_m)_{m\in\Omega}$

$$b_m(j) := \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} mj\right) \qquad (m, j \in \Omega)$$

$$\mathcal{O}^*_{\sqrt{N}b_k} b_m = b_{m+k \mod N} \qquad (m, k \in \Omega)$$

Verschränkte Zustände

Definition: Gegeben seien $\Omega = \{0,1\}^n$ sowie eine Orthonormalbasis $(\gamma_m)_{m\in\Omega}$ in $L_2(\Omega)$. Ein Operator J_γ ist dann wie folgt definiert:

$$J_\gamma : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega) \otimes L_2(\Omega)$$
$$J_\gamma f(m,r) := f(m)\gamma_m(r) \qquad (m, r \in \Omega,\ f \in L_2(\Omega)).$$

Verschränkter Zustand („entangled state“)

$$e_\gamma(\sigma) := J_\gamma \sigma J_\gamma^* \quad (\sigma \text{ Zustand auf } L_2(\Omega))$$

$$\sigma = |\, f >< f| \Rightarrow e_\gamma(\sigma) = |\, J_\gamma f >< J_\gamma f|\,.$$

Lemma: Seien U eine Isometrie zwischen zwei separablen Hilberträumen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ und $\rho = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k |\, f_k >< f_k|$ ein Zustand auf $\mathcal{H}_1$. Dann ist $U\rho U^*$ ein Zustand auf $\mathcal{H}_2$, und es gilt

$$U\rho U^* = \sum_k p_k |\, U f_k >< U f_k|$$

Orthonormalbasen in $\mathrm{L}_2(\Omega) \otimes \mathrm{L}_2(\Omega)$

Satz: Gegeben seien $\Omega = \{0, 1\}^n$ sowie 2 Paare von Orthonormalbasen und entsprechenden parametrisierten Gruppen unitärer Operatoren in $L_2(\Omega)$: $(\gamma_m)_{m\in\Omega}$, $(U_k)_{k\in\Omega}$ sowie $(\tau_m)_{m\in\Omega}$, $(V_k)_{k\in\Omega}$. Für alle $k, l \in \Omega$ sei definiert (0 bezeichne das neutrale Element in Ω):

$$\xi_{kl} := (V_k \otimes U_l) J_\gamma \tau_0.$$

Dann ist $(\xi_{kl})_{k,l\in\Omega}$ Orthonormalbasis in $L_2(\Omega) \otimes L_2(\Omega)$.

Beispiel Bell-Basis ($\Delta_0 = |\uparrow>$, $\Delta_1 = |\downarrow>$)

$$\xi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1>|\uparrow_2> + |\downarrow_1>|\downarrow_2>)$$
$$\xi_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1>|\downarrow_2> + |\downarrow_1>|\uparrow_2>)$$
$$\xi_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1>|\uparrow_2> - |\downarrow_1>|\downarrow_2>)$$
$$\xi_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1>|\downarrow_2> - |\downarrow_1>|\uparrow_2>)$$

ξ_{11}: EPR-Singulett-Zustand - klassischer Fall eines verschränkten Spin-Zustands [BB+93]

$$
\begin{aligned}
\xi_{00}(m,r) &= J_{\Delta} b_0(m,r) \\
&= b_0(m)\Delta_m(r) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\Big(\frac{2\pi i}{N} 0m\Big)\Delta_m(r) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } m = r, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_0 \otimes \Delta_0 + \Delta_1 \otimes \Delta_1)(m,r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_{11}(m,r) &= (\mathcal{O}_{\sqrt{2}b_1} \otimes U_1) J_{\Delta} b_0(m,r) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}b_1 \Delta_0 \otimes \Delta_1 + \sqrt{2}b_1 \Delta_1 \otimes \Delta_0)(m,r) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\exp(\frac{2\pi i}{2} m)\Delta_0(m)\Delta_1(r) \\
&\quad + \exp(\frac{2\pi i}{2} m)\Delta_1(m)\Delta_0(r)\Big) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } m = 0,\ r = 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } m = 1,\ r = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_0 \otimes \Delta_1 - \Delta_1 \otimes \Delta_0)(m,r)
\end{aligned}
$$

Ein verallgemeinertes Teleportationsmodell

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3 = L_2(\{0,1\}^n)$.

1. Zustand ρ auf $\mathcal{H}_1$, verschränkter Zustand $e_\gamma(\sigma) = J_\gamma \sigma J_\gamma^*$ auf $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$.

2. Verschränkung $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ durch Messung gemäß

$$F := \sum_{n,m=1}^{N} z_{nm} F_{nm}$$

$$(z_{nm} \in \mathbb{R},\ F_{nm} := |\,\xi_{nm} >< \xi_{nm}|\,).$$

   Von Neumannsches Messpostulat $\Rightarrow$ Gesamtzustand

$$\rho_{nm}^{123} = \frac{(F_{nm} \otimes \mathbb{1})\,\rho \otimes e_\gamma(\sigma)\,(F_{nm} \otimes \mathbb{1})}{\mathrm{tr}_{123}(F_{nm} \otimes \mathbb{1})\,\rho \otimes e_\gamma(\sigma)\,(F_{nm} \otimes \mathbb{1})}$$

3. Klassische Mitteilung Messergebnis.

4. Zustand auf $\mathcal{H}_3$ durch Kanal Λ_{nm} bestimmt:

$$\Lambda_{nm}(\rho) = \mathrm{tr}_{12} \frac{(F_{nm} \otimes \mathbb{1})\,\rho \otimes e_\gamma(\sigma)\,(F_{nm} \otimes \mathbb{1})}{\mathrm{tr}_{123}(F_{nm} \otimes \mathbb{1})\,\rho \otimes e_\gamma(\sigma)\,(F_{nm} \otimes \mathbb{1})}$$

Perfekte Teleportation:

1. Für jedes Paar n, m existiert ein unitärer Operator $v_{nm} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_3$, so dass

$$\Lambda_{nm}(\rho) = v_{nm} \rho \, v_{nm}^* \qquad (\rho \in \mathcal{S}).$$

2. Für die Wahrscheinlichkeiten $p_{nm}(\rho)$ der Messwerte z_{nm} gilt:

$$\sum_{nm} p_{nm}(\rho) = 1 \qquad (\rho \in \mathcal{S}).$$

$e_\Delta(\sigma) = | \, J_\Delta b_0 >< J_\Delta b_0 | \, ,$
$U_k f(j) = f(j \oplus k),$
Orthonormalbasis $(\xi_{kl})_{k,l \in \Omega}$ in $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ mit

$$\xi_{kl} = (\mathcal{O}_{\sqrt{N} b_k} \otimes U_l) J_\Delta b_0$$

$$\Rightarrow \Lambda_{nm}(\rho) = U_m \mathcal{O}^*_{\sqrt{N} b_n} \rho \, \mathcal{O}_{\sqrt{N} b_n} U_m^*$$

Realistischer:

- Teleportation mit kohärenten Zuständen: $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3 = \Gamma(L_2(\{0,1\}^n))$ bzw. $\Gamma(\mathbb{R}^k \times L_2(\{0,1\}^n))$. [FO01, 232, 236]

- Nicht perfekte Teleportation: Berücksichtigen von Energieverlust, Wahrscheinlichkeit für Vakuumzustand $\neq 0$. [FO01, 231, 239ff.]

Weitere Anwendungen

- Quantencomputing: $\mathcal{H}_1$ Input, $\mathcal{H}_2$ Zustand Computer, $\mathcal{H}_3$ Output.

- Gehirnmodelle [FFO03].

- Zahlenanalogien zur Genetik.