Gruppen unitärer Operatoren und vollständige Orthonormalsysteme

- Ein Teleportationsmodell in Qubit-Räumen -

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Mathematiker
an der

FERNUNIVERSITÄT

GESAMTHOCHSCHULE IN HAGEN

Fachbereich Mathematik

eingereicht von	:	Johannes Wollbold
geb. am	:	28.10.1958 in Saarbrücken
Betreuer	:	Prof. Dr. R. Börger
		Prof. Dr. K.-H. Fichtner (Friedrich-Schiller-Universität Jena)

Erfurt, 10. Juli 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

1935 versuchten A. Einstein, B. Podolsky und N. Rosen die Unvollständigkeit der Quantentheorie nachzuweisen, vor dem Hintergund der philosophischen Frage des Determinismus [EPR35]. Damit setzten sie eine Diskussion in Gang, die nicht nur das Weltbild der Physik grundlegend veränderte, sondern inzwischen auch zu gelungenen Experimenten führte, die an Science fiction erinnern: Beamen, Teleportation eines Teilchenzustands unabhängig von der Lichtgeschwindigkeit.

Bekanntlich konnte sich A. Einstein nicht damit abfinden, dass im Allgemeinen nur Ausagen über den wahrscheinlichen Ausgang von Messungen an Quantensystemen gemacht werden können. Er glaubte, die Quantenmechanik müsse ergänzt werden durch eine umfassendere deterministische Theorie (D. Bohm etwa führte eine solche Theorie „verborgener Variablen“ aus). Um diese Unvollständigkeit zu beweisen, gehen Einstein, Podolsky und Rosen im angegebenen Artikel von einer Definition physikalischer Realität aus - im Sinne einer nur hinreichenden Bedingung -, der sicher die meisten philosophischen Richtungen zustimmen könnten: „If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.“

Sie stellen ein Gedankenexperiment an: „...let us suppose that we have two systems, I and II, which we permit to interact from the time $t = 0$ to $t = T$, after which time we suppose that there is no longer any interaction between the two parts.“ Dann liegt ein von von E. Schrödinger so genannter verschränkter Zustand vor.

Wie später ausgeführt werden wird, entsprechen in der Quantenmechanik mögliche Messwerte den Eigenwerten eines selbstadjungierten Operators auf einem Hilbertraum. Seien nun $a_1, a_2, ...$ die Eigenwerte, $u_1, u_2, ...$ die entsprechenden Eigenfunktionen eines Operators A, einer Größe im System I. Ohne auf mathematische Einzelheiten einzugehen, sei die Wellenfunktion des kombinierten Systems I+II - entsprechend [EPR35, 779] - angegeben als

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1) \tag{0.0.1}$$

Im Gedankenexperiment wird nun angenommen, dass der Wert a_k der Größe A gemessen wird. Nach dem von Neumannschen Messpostulat wird so $\Psi(x_1, x_2)$ „reduziert“ zu $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$, das 1. System wird somit durch den Zustandsvektor u_k, das zweite durch den Vektor ψ_k beschrieben. Will man statt A eine Größe B mit den Eigenwerten $b_1, b_2, ...$ messen, entspricht dem die Entwicklung von Ψ nach den Eigenfunktionen $v_1, v_2, ...$:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) v_s(x_1) \tag{0.0.2}$$

Nach Messung des Wertes b_r gilt dann entsprechend $\Psi(x_1, x_2) = \varphi_r(x_2) v_r(x_1)$, das 2. System wird durch φ_r beschrieben. Die System I beschreibenden Funktionen $u_n,\ v_s$ in (0.0.1) und (0.0.2) sind also maximal mit den System II zugehörigen $\psi_n,\ \varphi_s$ korreliert.

Es ist vorausgesetzt, dass es zum Zeitpunkt dieser alternativen Messungen an System I keine Interaktion zwischen beiden Systemen gibt. Daher kann sich das zweite System durch die jeweilige Messung nicht verändert haben. So beschreiben danach die beiden unterschiedlichen Wellenfunktionen ψ_k und φ_r die gleiche Realität. Am Beispiel einer Impuls- bzw. Ortsmessung wird nachgewiesen, dass ψ_k und φ_r Eigenfunktionen zweier nicht kommutierender Operatoren P bzw. Q sein können. Als Ergebnis einer Messung an Eigenfunktionen kann jedoch mit Sicherheit der entsprechende Eigenwert vorausgesagt werden. Nach dem Realitäts-Kriterium entspricht daher sowohl P als auch Q ein Element der physikalischen Realität - und zwar der gleichen.

Die Heisenbergsche Unschärferelation besagt nun, dass - wegen der Nicht-Kommutativität - die genaue Kenntnis der P entsprechenden Größe jegliche Kenntnis über Q ausschließt. Am Anfang des Artikels [EPR35, 778b] waren zwei Möglichkeiten angegeben worden, dies zu interpretieren: „(1) the quantum-mechanical description of reality given by the wave function is not complete or (2) when the operators corresponding to two physical quantities do not commute the two quantities cannot have simultaneous reality.“ Die 2. Alternative wurde jetzt ausgeschlossen, wobei die Vollständigkeit der quantenmechanischen Beschreibung angenommen worden war. Der Widerspruch beweist Alternative (1).

Einstein, Podolsky und Rosen stellen am Ende ihrer Argumentation noch einmal eine wesentliche Voraussetzung ihres Beweises heraus. Die beiden Messungen entsprechend A bzw. B können nicht gleichzeitig stattfinden, daher können auch P und Q nicht simultan vorausgesagt werden. Dies könnte zu einer weiteren Bedingung für ihre Realität gemacht werden, aber: „This makes the reality of P and Q depend upon the process of measurement carried out on the first system, which does not disturb the second system in any way. No reasonable definition of reality could be expected to permit this.“ So „unvernünftig“ ist auch das heutige Bild von Wirklichkeit nicht geworden. Doch musste man die Annahme fallen lassen, dass eine Messung an I System II nicht stört.

Ein wichtiger Schritt dahin war der Beweis: „In a theory in which parameters are added to quantum mechanics to determine the results of individual measurements, without changing the statistical predictions, there must be a mechanism whereby the setting of one measuring device can influence the reading of another instrument, however remote.“ Eine gleichzeitig kausale und lokale Theorie ist daher ausgeschlossen. [Bel64, 195 u. 199]

Inzwischen besteht Konsens: Zwischen Teilchen in einem verschränkten Zustand gibt es eine Wechselwirkung, jedoch ist sie nicht wie etwa die elektromagnetische Kraft durch Felder bzw. Partikel vermittelt. Daher ist sie auch nicht an die Lichtgeschwindigkeit gebunden, also nichtlokal. Im Gedanken- wie bedingt auch im realen Experiment spielt die Entfernung beider Teilstrahlen keine Rolle.

C. Bennett, G. Brassard u.a. beschrieben 1993 [BB+93] einen Weg, um den dem Gedankenexperiment zugrunde liegenden verschränkten Zustand zur Informationsübertragung zu nutzen. Ihr Hauptbeispiel sind 2 Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen[1], die in einen „EPR-Zustand“[2] gebracht werden. Ein Teilchen befindet sich im Raumbereich einer Beobachterin Alice, der andere Teilstrahl im Bereich eines Beobachters Bob. Alice möchte nun einen Zustand $|\phi>$ eines weiteren Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens zu Bob übertragen.[3] Dazu führt sie eine gemeinsame Messung dieses Teilchens mit ihrem Teil des EPR-Zustands aus. Diese bewirkt einmal, dass ihr Zustand $|\phi>$ zerstört wird. Zum anderen nimmt Bobs verschränktes Teilchen augenblicklich, „durch spukhafte Fernwirkung“ (A. Einstein) den Zustand $|\phi>$ an[4] - jedoch in einer einfachen, reversiblen Transformation, in diesem Fall der identischen oder einer Rotation des Spin um die $x-$, $y-$ oder $z-$Achse. Dies hängt von Alice's Messergebnis ab, welches sie Bob daher auf klassischem Weg mitteilen muss (z.B. durch ein elektromagnetisches Signal). So ist das Gesetz der Unmöglichkeit eines augenblicklichen Informationstransfers [BB$^+$93, 1895] nicht verletzt - und Einstein behält letztlich doch recht, zwar nicht mit einem philosophischen Argument, jedoch mit seiner größten physikalischen Leistung: der Relativitätstheorie.

Möglichkeiten der Verallgemeinerung auf Systeme mit mehr als zwei Basis-Zuständen werden schon in [BB$^+$93] erwähnt. In [FO01] wird zunächst ein idealisiertes Teleportationsmodell für Bosonen - also z.B. Photonen - eingeführt. Anschließend wird es auf realistischere physikalische Situationen ausgeweitet: Einerseits wird der Verlust von Energie eines Teilchenstrahls berücksichtigt, andererseits die räumliche Trennung von Alice und Bob explizit aufgenommen. Teleportation könnte eine wichtige Rolle bei der Informationsübertragung in zukünftigen Quantencomputern spielen, verschränkte Zustände scheinen unabdingbar für die Realisierung logischer Gatter zu sein. So wird in [FFO01] und [Fic02] das Modell in einem weiteren Sinn gesehen als Grundlage zur Darstellung maschineller (und menschlicher?) Prozesse der Informationsverarbeitung. Auch physikalische Teleportation kann als ein solcher betrachtet werden. In allen Fällen repräsentieren 3 (zunächst als gleich vorausgesetzte) Hilberträume Input, inneren Zustand und Output des informationsverarbeitenden Systems.

Die Andeutungen der vielfältigen physikalischen Hintergründe und technischen Möglichkeiten mögen genügen[5], denn Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind im Wesentlichen einige mathematische Grundlagen dieses Teleportationsmodells. Dabei wird verallgemeinert mit dem Ziel, Anwendungsmöglichkeiten auszuweiten, z.B. in der Genetik.

[1] Z.B. Elektronen. Der Spin beeinflusst das Verhalten eines Teilchens in einem Magnetfeld. Aufgrund von Analogien zum entsprechenden Begriff der klassischen Physik kann er als inneres Drehmoment aufgefasst werden. Dieses ist quantisiert: Eine Messung in einer Raumrichtung ergibt einen von zwei möglichen Werten.

[2] Das Einstein-Podolsky-Posen-Paradoxon wurde 1951 bzw. 1957 von D. Bohm sowie Y. Aharonov am Beispiel eines Paars von Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen formuliert - vgl. [Pen91, 75], [Bel64, 195].

[3] Diesen Zustand muss sie nicht kennen, z.B. als Eigenzustand nach einer vorausgehenden Messung/ Präparation.

[4] In der Quantenphysik sind gleichartige Zustände ununterscheidbar, und das Wesentliche ist die mathematische Form. Es wird also Information transportiert, keine Materie.

[5] Einen Überblick bietet [CW97], insbesondere Kapitel 9 speziell zur Quanten-Teleportation, sowie auch [Deu01, 51ff.]. Die Bemerkungen hier wie im folgenden Text sollen meist nur an eventuell Bekanntes erinnern oder die Neugier anregen. Sollten sie nicht ganz zutreffende Interpretationen suggerieren, bitte ich dies einem - wenn auch seit langem an Quantentheorie interessierten - Mathematiker nachzusehen.

Im Prozess der Genexpression wird DNA in RNA transkribiert, dann durch ein Ribosom sequenziell gelesen und in Proteine translatiert. Ein Gen ist ein Abschnitt der DNA/RNA, der für ein Protein codiert. Buchstaben des Code sind die 4 Basen Adenin, Guanin, Thymin (Uracil bei RNA) und Cytosin, ein Wort aus 3 Buchstaben (Triplet) codiert für eine der 20 Aminosäuren, aus denen ein Protein aufgebaut ist. Bemerkenswert ist einerseits, dass mittels der 4^3 unterschiedlichen Basen-Kombinationen (Worte) genau 20 Aminosäuren[6] codiert werden. Bestimmte Mengen von Triplets codieren also jeweils für eine bestimmte Aminosäure. Bis vor kurzem glaubte man, dass sich diese nicht-injektive Zuordnung nach einem festen Muster vollzieht. Inzwischen geht man jedoch davon aus, dass es wiederum 20 mögliche Abbildungen aus der Menge der 64 Worte in die Menge der 20 Protein-Elemente gibt (abhängig von äußeren Faktoren wie Art der Zelle und Alter).

Es existiert noch keine befriedigende Hypothese, wie sich dieser Prozess - insbesondere die Translation - im einzelnen vollzieht und wie die Zahlenrelationen zustande kommen. Diese könnten eventuell durch das verallgemeinerte Teleportationsmodell erklärt werden, und es ergibt sich eine Hypothese, weshalb ein Wort des genetischen Code für 20 unterschiedliche Aminosäuren codieren könnte. Allerdings muss die konkrete Zuordnungsvorschrift derzeit offen bleiben. So ist die vorliegende Arbeit in dieser Hinsicht als ein Spiel mit Denkmustern und -möglichkeiten zu betrachten.

Für die Betreuung der Arbeit möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. R. Börger und Herrn Prof. K.-H. Fichtner bedanken, außerdem bei Herrn B. Fotsing für einzelne Korrekturen und Hinweise.

In der vorliegenden Fassung wurden einige kleinere Fehler korrigiert. Inhaltliche Bedeutung hat nur, dass für das Maß μ in Definition 1.3.2 des Fockmaßes nicht mehr der diskrete Fall (Zählmaß) zugelassen wurde.

[6] In bestimmten Situationen kann jedoch eine der 20 Aminosäuren durch eine weitere ersetzt werden. So wurde kürzlich eine 22. in der Natur auftretende Aminosäure entdeckt [HGF$^+$02].

Kapitel 1

Voraussetzungen aus Quantenmechanik und Quantenstochastik

1.1 5 Postulate

Postulat 1 *Die allgemeine Struktur eines elementaren Quantensystems wird durch einen geeigneten separablen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ beschrieben.*

Ein **Zustandsvektor** $f \in \mathcal{H}$ mit $\|f\| = 1$ enthält alle in einem bestimmten Zusammenhang interessierenden Informationen über ein einzelnes Teilchen. Beispiele sind: Elektron im Atom, Polarisationsrichtung eines Photons, „Gaußsches Wellenpaket" eines freien Teilchens (dieses bewegt sich ohne Einwirkung einer Kraft), oder auch (in Näherung) harmonische Schwingungen eines Moleküls [Knö02, 3.4.1].

Dabei sind alle auf 1 normierten Zustandsvektoren eines eindimensionalen Unterraums $\mathcal{U}$ äquivalent: sie liefern die gleichen - unter Postulat 3 erklärten - wesentlichen Größen Erwartungswert einer Observablen und Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Messwerte. Da die Elemente von $\mathcal{U}$ die Form cf $(c \in \mathbb{C}, |c| = 1)$ haben, kann man auch sagen: Ein „Phasenfaktor" $c = e^{i\varphi}(\varphi \in \mathbb{R})$ spielt keine Rolle.

Die hier auftretenden Hilberträume haben die Form

$$L_2(\Omega, \mathfrak{F}, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} | f \text{ messbar}, \int_\Omega |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty\} \tag{1.1.1}$$

mit einem vollständigen separablen metrischen Raum $\Omega,\ x \in \Omega,\ \mathfrak{F} : \sigma-$Algebra der Borel-Mengen aus Ω, μ : lokal endliches Maß auf $\mathfrak{F}$. Genau genommen betrachtet man den Quotientenraum $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)/\sim$, wobei $f \sim g$, wenn $f = g$ $\mu-$fast überall ist.

Ein Skalarprodukt ist definiert durch

$$< f \mid g > := \int_\Omega \overline{f(x)} g(x)\, d\mu(x) \tag{1.1.2}$$

Wie in der Physik üblich, wird es also als linear in der 2. Komponente angenommen.

Häufig in der Quantenmechanik verwendet wird der Raum $L_2(\mathbb{R}^n)$ als Vervollständigung von $\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} | f \text{ stetig}, \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty\}$. Dieser Raum entspricht (1.1.1) mit dem Lebesgue-Maß. Eine Funktion aus $L_2(\mathbb{R}^4)$ beschreibt ein einzelnes Teilchen in Abhängigkeit von 3 Raumkordinaten und der Zeit.

Ist Ω abzählbar, so ist die Standard-Metrik die diskrete Metrik $\rho(x, y) = 1 - \delta_{xy}$ (δ_{xy} bezeichnet das Kroneckersymbol[1]). Da dann $\forall x \in \Omega, \epsilon < 1 : \; U_\epsilon(x) = \{x\}$, sind die Einpunktmengen und damit alle Teilmengen von Ω offen; die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{F}$ ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$. Ein Maß auf $[\Omega, \mathfrak{F}]$ wird definiert durch

$$\mu(A) = |A| \qquad (A \in \mathfrak{F}) \tag{1.1.3}$$

Wenn nicht anders erwähnt, wird für abzählbares Ω immer dieses Zählmaß sowie die σ-Algebra $\mathcal{P}(\Omega)$ vorausgesetzt und die abgekürzte Schreibweise $L_2(\Omega)$ verwendet.

Für das Thema dieser Arbeit wichtig sind endlichdimensionale Hilberträume $\mathcal{H}$; wenn nicht anders erwähnt, wird daher ein solcher Hilbertraum zugrunde gelegt. Werden allgemeine Definitionen und Aussagen (insbesondere die Postulate) dadurch nicht unnötig kompliziert, wird jedoch $L_2(\Omega)$ mit abzählbarem Ω bzw. isomorph dazu ein beliebiger separabler Hilbertraum vorausgesetzt, oder es wird zumindest in Nebenbemerkungen darauf eingegangen.[2]

Noch konkreter geht es um Räume von Quantenbits (**Qubit-Räume**). Die zugrunde liegende Menge ist nun $\Omega = \{0, 1\}$. 1 Qubit wird repräsentiert durch ein Element $f \in L_2(\Omega)$.[3] Auf einfache Weise ist eine disjunkte Zerlegung von $\Omega = A_0 + A_1 := \{0\} + \{1\}$ gegeben. Eine beliebige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ hat somit die Form $f(x) = \sum_{j=0}^{1} c_j \chi_{A_j}(x)$ mit $c_j = f(j)$. Nach Definition des Integrals ist dann

$$\int_\Omega |f(x)|^2 d\mu(x) = \sum_{j=0}^{1} |f(j)|^2 \mu(A_j) = |f(0)|^2 + |f(1)|^2 < \infty$$

Da $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, sind alle $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar, also

$$L_2(\Omega) = \mathbb{C}^\Omega := \{f : \Omega \to \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^{|\Omega|} \tag{1.1.4}$$

Das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{C}^2$ ist mit dem Skalarprodukt von f, $g \in L_2(\Omega)$ entsprechend (1.1.2) identisch:

$$\begin{aligned} <f \,|\, g> &= \int_\Omega \overline{f(x)} g(x) d\mu(x) = \sum_{j=0}^{1} \overline{f(j)} g(j) \mu(A_j) \\ &= \overline{f(0)} g(0) + \overline{f(1)} g(1) \\ &=: \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 \\ &= \; <[x_1, x_2] \,|\, [y_1, y_2]> \qquad \text{mit } [x_1, x_2], [y_1, y_2] \in \mathbb{C}^2 \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

[1] $\delta_{xy} = 1$ für $x = y$ und $\delta_{xy} = 0$ für $x \neq y$.

[2] Daher und um den Zusammenhang mit dem allgemeinen mathematischen Rahmen der Quantentheorie herauszustellen, werden auch im endlichdimensionalen Fall Hilberträume als solche bezeichnet und nicht als unitäre Vektorräume. Ebenso wird im Fall einer abzählbaren Menge Ω nicht die für Folgenräume ebenfalls übliche Notation $l_2(\Omega)$ verwendet.

[3] Physikalisch kann f etwa den Spin eines Elektrons modellieren, oder die Polarisation eines Photons in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Entsprechend argumentiert man für eine beliebige endliche Menge Ω. Für abzählbares Ω ist natürlich

$$\begin{aligned} L_2(\Omega) &= \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid \sum_{j\in\Omega} |f(j)|^2 < \infty\} \neq \mathbb{C}^\Omega \\ <f \mid g> &= \sum_{j\in\Omega} \overline{f(j)} g(j) \qquad (f, g \in L_2(\Omega)) \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Definition 1.1.1 ***(Vollständige Orthonormalsysteme)*** [4]*Sei $J \subset \mathbb{N}$. Ein System $(\gamma_k)_{k\in J}$ von Elementen eines separablen Hilbertraums $\mathcal{H}$ heißt orthogonal, wenn $0 \notin (\gamma_k)$ und $<\gamma_k \mid \gamma_j> = 0$ für alle $k, j \in J$, $k \neq j$. Es heißt orthonormal, wenn darüber hinaus für alle $k \in J$ gilt $<\gamma_k \mid \gamma_k>= 1$. Ein Orthonormalsystem ist vollständig, wenn der Abschluss der linearen Hülle $\overline{\mathrm{lin}(\gamma_k)}_{k\in J}$ mit $\mathcal{H}$ identisch ist. Es wird auch als Orthonormalbasis bezeichnet. [KA82, 118]*

Für alle $f \in \mathcal{H}$ existiert dann eine Folge $(c_k)_{k\in J}$, $c_k \in \mathbb{C}$, so dass $f = \sum_{k\in J} c_k\gamma_k$ ist. Ist $J = \mathbb{N}$, so ist $\mathrm{lin}(\gamma_k)_{k\in J}$ als endliche Summe nicht mit ihrem Abschluss identisch.

Die orthogonale Standardbasis in $L_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{N}$ wird hier notiert als $(\Delta_k)_{k\in\Omega}$ mit

$$\Delta_k(j) := \delta_{kj} \qquad (k, j \in \Omega) \tag{1.1.7}$$

Mit $<\gamma_k \mid f> = <\gamma_k \mid \sum_{j\in J} c_j\gamma_j> = c_k$ ergibt sich die Fourier-Entwicklung:

$$f = \sum_{k\in J} <\gamma_k \mid f>\gamma_k, \qquad \text{sowie nach einfacher Rechnung:} \tag{1.1.8}$$

$$<f \mid g> = \sum_{k\in J} <f \mid \gamma_k><\gamma_k \mid g> \qquad (f, g \in \mathcal{H}) \tag{1.1.9}$$

$$\Rightarrow \|f\|^2 = \sum_{k\in J} |<\gamma_k \mid f>|^2 \qquad \text{Parsevalsche Gleichung} \tag{1.1.10}$$

Gilt eine dieser 3 Bedingungen für alle f bzw. f und $g \in \mathcal{H}$, so ist dies äquivalent zur Vollständigkeit von $(\gamma_k)_{k\in J}$. [HS71, Satz 21.9]

Postulat 2 *Jeder Observablen eines Quantensystems entspricht ein linearer selbstadjungierter Operator A auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dabei sind die möglichen Messwerte die Eigenwerte des Operators.*

Unter einer Observablen versteht man eine physikalische Größe, die durch eine bestimmte Versuchsanordnung gemessen werden kann, z.B. Ort, Impuls oder Drehimpuls eines Teilchens.

Wie üblich werden Operatoren als linear angenommen, ohne dies ausdrücklich zu erwähnen. Die auftretenden Operatoren sind beschränkt, allein schon da das zu entwickelnde Modell auf endlichdimensionalen Hilberträumen basiert.[5]

[4]Es gelte immer: $0 \notin \mathbb{N}$.

[5]Im Fall unbeschränkter Operatoren spielen Definitionsbereiche (oft Sobolev-Räume von Distributionen) und Erweiterungen von Operatoren eine Rolle - vgl. z.B. [Tri80, Kap. 21] oder [HS71, Kap. X].

Definition 1.1.2 *Seien $\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2$ Hilberträume. Zu einem beschränkten Operator $A:\mathcal{H}_1\rightarrow\mathcal{H}_2$ ist der adjungierte Operator $A^*:\ \mathcal{H}_2\rightarrow\mathcal{H}_1$ definiert durch*

$$<f_1\,|\,A^*f_2>_{\mathcal{H}_1} = <Af_1\,|\,f_2>_{\mathcal{H}_2} \qquad (f_1\in\mathcal{H}_1, f_2\in\mathcal{H}_2)$$

Gilt $A^* = A$, so ist A selbstadjungiert. Da dann die Eigenwerte reell sind, kann man sie als Messwerte interpretieren.

Definition 1.1.3 *Sei $f\in\mathcal{H},\ \|\,f\,\| = 1$.*

1. *$[\,f\,] := \{\alpha f|\,\alpha\in\mathbb{C}\}$ heißt der durch f erzeugte eindimensionale Unterraum von $\mathcal{H}$.*

2. *Der Operator $|\,f><f|$, definiert durch*
   $|\,f><f|\,g := <f\,|\,g>f \qquad (f,g\in\mathcal{H})$
   heißt Projektor zum Unterraum $[\,f\,]$.

3. *Für einen abgeschlossenen Unterraum D von $\mathcal{H},\ (\gamma_l)_{l=1}^{dimD}$ vollständiges Orthonormalsystem in D ist der Projektor P_D definiert durch*
   $\mathrm{P}_D := \sum_{l=1}^{n}|\,\gamma_l><\gamma_l|$

Ein Operator auf einem Hilbertraum ist ein Projektor genau dann, wenn $\mathrm{P} = \mathrm{P}^*$ und $\mathrm{P} = \mathrm{P}^2$, wenn also ein selbstadjungierter und idempotenter Operator vorliegt.

Ein eindimensionaler Projektor wird als $|\cdot><\cdot|$ geschrieben in Anlehnung an die Dirac'sche bra-ket-Notation [Sak94, 10-22]. Ein Zustandsvektor in $\mathcal{H}$ wird dabei $|\cdot>$ notiert (und so auch auf die Bedeutung des Unterraums $\mathcal{U}$ angespielt, entsprechend dem zu Postulat 1 Gesagten). Mittels des Skalarprodukts entspricht jedem Element $|\,f>$ des Hilbertraums $\mathcal{H}$ ein lineares Funktional $<f\,|\cdot>$ auf diesem. Schreibt man es als (Zeilen-)Vektor $<\cdot|$ in dem zu $\mathcal{H}$ dualen Vektorraum, so ist die eingeführte Schreibweise des Skalarprodukts (inneren Produkts) von $|\,f>$ und $|\,g>$ eine suggestive Abkürzung der Anwendung des Funktionals $<f\,|$ auf $|\,g>$ bzw. des Matrixprodukts beider Vektoren:

$$\begin{array}{c}<f\,|\,g> = (<f\,|)\cdot(|\,g>)\\ \text{bra (c) ket}\end{array} \tag{1.1.11}$$

Der Projektionsoperator ist dann ein Tensorprodukt eines ket- mit dem dualen bra-Vektor. Auf einem n-dimensionalen Hilbertraum hat es eine Darstellung als $n\times n$-Matrix. Die Schreibweise $|\,f><f|\ g>$ für einen Projektor zum Unterraum $[\,f\,]$, angewandt auf $|\,g>$, enthält gleich dessen Definition: Fasst man den bra in der Mitte und den 2. ket zusammen (und stellt dieses Skalarprodukt nach vorne), so ergibt sich $(<f\,|\,g>)\cdot|\,f>$. Durch diese „Zweideutigkeit" lässt sich manchmal verkürzt rechnen (s. 1.1.16 oder Satz 1.1.5).[6] Über den hier angesprochenen Fall hinaus kann ein allgemeines Assoziativgesetz aufgestellt werden, das auch beliebige Operatoren betrifft [Sak94, 16f.].

[6] In anderen Zusammenhängen wirkt die Schreibweise eines Vektors als $|\cdot>$ jedoch unübersichtlicher. Daher wird die vollständige bra-ket-Notation nur exemplarisch bei einigen Rechnungen verwendet.

Satz 1.1.4 ***(Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren)*** *Sei A ein selbstadjungierter Operator auf einem endlichdimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann existieren eindeutig bestimmte Folgen $(z_j)_{j=1}^n$ paarweise und von Null verschiedener reeller Zahlen sowie $(D_j)_{j=1}^n$ paarweise orthogonaler Unterräume, so dass:*

$$A = \sum_{j=1}^{n} z_j \, \mathrm{P}_{D_j} \tag{1.1.12}$$

Dabei sind z_j die Eigenwerte[7] (ohne 0) und D_j die dazu gehörigen Eigenräume von A.

Ein Beweis dieses grundlegenden Satzes der Funktionalanalysis für beliebige Hilberträume findet sich z.B. in [Tri80, Satz 20.1.] (beschränkte Operatoren) und [Tri80, Satz 20.2.] (unbeschränkte Operatoren). Der Satz kann auf normale Operatoren verallgemeinert werden [Mat98, 314].

Wählt man jeweils ein vollständiges Orthonormalsystem $(\gamma_{jl})_{l=1}^{\dim D_j}$ in einem Eigenraum D_j, so lässt sich A (nicht eindeutig) darstellen als

$$A = \sum_{j=1}^{n} z_j \sum_{l=1}^{\dim D_j} |\,\gamma_{jl} >< \gamma_{jl}| \tag{1.1.13}$$

Diese Darstellung wird im Folgenden auch abgekürzt zu $A = \sum_{j=1}^{N} z_j |\,\gamma_j >< \gamma_j|$ mit $N = \sum_{j=1}^{n} \dim D_j$.

$(\gamma_j)_{j=1}^{N}$ bildet ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$, nach dem jeder Zustandsvektor $f \in \mathcal{H}$ entwickelt werden kann:

$$f = \sum_{j=1}^{N} c_j \gamma_j \text{ mit } c_j := <\gamma_j \,|\, f> \tag{1.1.14}$$

Postulat 3 *Der Zustand eines Quantensystems wird durch einen positiven Spuroperator ρ auf einem geeigneten separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $\operatorname{tr} \rho = 1$ beschrieben. Der Erwartungswert einer Messung an dem Quantensystem ist gegeben durch $E_\rho(A) := \operatorname{tr}(\rho A)$.*

Der Begriff des Spuroperators [Mat98, 234] ist zur Definition einer Spur nur im unendlichdimensionalen Fall nötig.[8] Im Fall eines selbstadjungierten Operators beinhaltet er die Forderung, dass - bei einer Darstellung gemäß (1.1.12) bzw. (1.1.13) - $\sum_{j=1}^{\infty} z_j \dim D_j$ absolut konvergiert [Fic01, 15].

Die Spur eines Operators ist eindeutig bestimmt, unabhängig von der Wahl einer Orthonormalbasis. Für $f \in \mathcal{H}$, $\|f\| = 1$ ist $\operatorname{tr} |\, f >< f| = 1$. Denn wählt

[7] Auf einem endlichdimensionalen Hilbertraum ist das Spektrum eines beschränkten Operators A mit der Menge seiner Eigenwerte (endlicher Vielfachheit) identisch. Es muss also nicht allgemein als Komplement der Resolventenmenge von A definiert und nach Eigenwert- / Residualspektrum oder diskretem / kontinuierlichem Spektrum differenziert werden [Tri80, Definition 18.1. und 18.3.].

[8] Dann gilt die Definition $\operatorname{tr} A := \sum_{j=1}^{\infty} <\gamma_j \,|\, A\gamma_j>$ für Operatoren R endlichen Rangs (d.h. $R\mathcal{H}$ ist endlichdimensional). Die Vervollständigung dieses Raums in einer bestimmten Spurklassennorm ist der Raum der Spur(klassen)operatoren auf $\mathcal{H}$.

man eine Orthonormalbasis $(\gamma_j)_{j=1}^N$ in $\mathcal{H}$, so dass $\gamma_1 = f$, dann gilt $\operatorname{tr} | f >< f| = \sum_{j=1}^N < \gamma_j \,|\, f >< f| \, \gamma_j > = \|f\|^2 = 1$. Für einen Projektor auf einen Unterraum D von $\mathcal{H}$ gilt wegen der Linearität der Spurbildung $\operatorname{tr} \mathrm{P}_D = \dim D$.

[Fic01, 22] ρ heißt **reiner Zustand**, wenn ein $f \in \mathcal{H}$ existiert, so dass $\rho = | f >< f|$. Alle anderen Zustände heißen **gemischte Zustände**. Ein gemischter Zustand ρ liegt genau dann vor, wenn ein vollständiges Orthonormalsystem $(\gamma_k)_{k=1}^N$ in $\mathcal{H}$ und eine Familie nichtnegativer reeller Koeffizienten $(p_k)_{k=1}^N$ existieren, so dass

1. $\sum_k p_k = 1$,
2. mindestens 2 Koeffizienten p_k von 0 verschieden sind,
3. $\rho = \sum_k p_k | \gamma_k >< \gamma_k|$

Die reinen Zustände ρ sind genau die Extremalpunkte der konvexen Menge der Zustände auf $\mathcal{H}$, d.h. wenn ρ_1 und ρ_2 Zustände auf $\mathcal{H}$ sind und $0 < \lambda < 1$, dann folgt aus $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ (vgl. [BR87, Theorem 2.3.15. und 2.3.19.], wo ein Zustand als Funktional über einer *-Algebra von Operatoren aufgefasst wird - s. Definition 1.2.1).

Falls alle Mischungsgewichte p_k paarweise und von 0 verschieden sind, sind sie klassische Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Quantensystem den Zustand $| \gamma_k >< \gamma_k|$ annimmt.[9] Gemischte Zustände beschreiben Systeme, bei denen die quantenphysikalisch mögliche Information nicht vollständig vorliegt.

Während im Fall eines gemischten Zustands Produkte aus reellen Zahlen und Projektoren summiert werden, tritt bei den Zustandsvektoren eine Superposition von Vektoren auf, multipliziert mit komplexen Skalarprodukten (1.1.14). Dabei gibt - im Fall von Eigenwerten der Vielfachheit 1 - das Betrags*quadrat* der Fourierkoeffizienten c_j die Wahrscheinlichkeit an, bei einem Quantensystem, das durch den Zustandsvektor f charakterisiert ist, den zu γ_j gehörenden Eigenwert z_j eines entsprechenden Operators zu messen.

Die Fourierkoeffizienten drücken zusätzlich eine Phasenbeziehung zwischen den Eigenzuständen aus. Aus dieser folgen beispielsweise - im Fall von Spin-$\frac{1}{2}$-Systemen - die Orientierung des Spin in der xy-Ebene [Sak94, 175] oder Beugungsphänomene (Doppelspaltexperiment: Auslöschen oder Verstärken zweier Funktionen je nach ihrer relativen Phase). Bildlich gesprochen besteht in der Überlagerung komplexer Funktionen der Wellencharakter eines quantenphysikalischen (reinen) Zustands, der diesen fundamental von klassischen Partikeln unterscheidet. Ein reiner Zustand wird auch als kohärente Superposition bezeichnet; dagegen ist ein gemischter Zustand eine inkohärente Überlagerung reiner Zustände. [Fic68, 255]

Satz 1.1.5 *Seien $\rho = | f >< f|$ ein Zustand und A ein selbstadjungierter Operator auf einem endlichdimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$. $(z_j)_{j=1}^N$ sei eine Folge (nicht notwendig verschiedener) Eigenwerte von A, und $(\gamma_j)_{j=1}^N$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. A besitze die Spektraldarstellung $A = \sum_{j=1}^N z_j | \gamma_j >< \gamma_j|$ entsprechend*

[9] $\sum_k p_k | \gamma_k >< \gamma_k|$ ist die Spektraldarstellung von ρ entsprechend 1.1.13. Diese ist im Fall zweier oder mehrerer gleicher Gewichte p_k nicht eindeutig.

(1.1.13). Dann gilt für den Erwartungswert der Observablen A im Zustand ρ:

$$E_{|\,f><f|}(A) = <f\,|\,Af> = \sum_{j=1}^{N} z_j\,|<\gamma_j\,|\,f>|^2 \tag{1.1.15}$$

BEWEIS: Hier macht die bra-ket-Assoziativität den Beweis einfacher:

$$\begin{aligned}
E_{|\,f><f|}(A) = \operatorname{tr}(\rho A) &= \sum_{j=1}^{N} <\gamma_j\,|\,f><f\,|\,A\gamma_j> \\
&= \sum_{j=1}^{N} <\gamma_j\,|\,f><f\,|\,\sum_{k=1}^{N} z_k|\,\gamma_k><\gamma_k|\,\gamma_j> \\
&= \sum_{j=1}^{N} z_j\,|<\gamma_j\,|\,f>|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N} z_j <f\,|\,\gamma_j><\gamma_j\,|\,f> \\
&= <f\,|\,\sum_{j=1}^{N} z_j|\,\gamma_j><\gamma_j|\,f> \\
&= <f\,|\,Af>
\end{aligned}$$

□

Setzt man in die 2. Gleichung dieses Satzes die Entwicklung des Zustandsvektors f nach (1.1.14) ein, so sieht man unter Anwendung des Assoziativgesetzes für bra- und ket-Vektoren sofort: $|c_j|^2$ ist Erwartungswert von $|\,\gamma_j><\gamma_j|$ im Zustand $|\,f><f|$:

$$E_{|\,f><f|}(|\,\gamma_j><\gamma_j|\,) = <f\,|\,\gamma_j><\gamma_j\,|\,f> = |c_j|^2 \tag{1.1.16}$$

Geht man - wie in der ursprünglichen, von E. Schrödinger geprägten Form der Quantenmechanik - von Zustandsvektoren als grundlegenden Bestimmungsgrößen aus, so wird über diese Entsprechung hinaus der Erwartungswert einer Observablen A unmittelbar als $<f\,|\,Af>$ definiert. Somit werden durch den Zustand $|\,f><f|$ die gleichen physikalisch wichtigen Größen bestimmt wie durch den Zustandsvektor f.

Postulat 4 *Die Zeitentwicklung eines Zustands ρ_0 zum Zustand ρ_t wird durch eine Gruppe unitärer Operatoren $\{U_t = e^{-itH}|\,t \in \mathbb{R}$ oder $t \in \mathbb{Z}\}$ auf $\mathcal{H}$ charakterisiert. Diese wird durch einen selbstadjungierten Operator H bestimmt. Es gilt:*

$$\rho_t = U_t \rho_0 U_t^* \tag{1.1.17}$$

Lemma 1.1.6 *Seien U eine Isometrie zwischen zwei separablen Hilberträumen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ und $\rho = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k|\,f_k><f_k|$ ein Zustand auf $\mathcal{H}_1$. Dann ist $U\rho U^*$ ein Zustand auf $\mathcal{H}_2$, und es gilt*

$$U\rho U^* = \sum_k p_k|\,Uf_k><Uf_k| \tag{1.1.18}$$

BEWEIS: $U\rho U^*$ ist ein Operator auf $\mathcal{H}_2$ (er ist für endlichdimensionalen Raum $\mathcal{H}_2$ nicht injektiv, wenn U nicht surjektiv ist). Da $\|U^*\| = \|U\| = 1$, ist $U\rho U^*$ wie ρ ein positiver Operator mit Spur 1, also ein Zustand.

$$\begin{aligned}
\forall g \in \mathcal{H}_2 : (U\rho U^*)\, g & \\
&= U\Big(\sum_k p_k | f_k >< f_k | \Big) U^* g \\
&= U\Big(\sum_k p_k < f_k \,|\, U^* g >_{\mathcal{H}_1} f_k\Big) && \text{n. Def. des Projektors } | f_k >< f_k | \\
&= \sum_k p_k < f_k \,|\, U^* g >_{\mathcal{H}_1} U f_k && \text{wegen der Linearität von } U \\
&= \sum_k p_k < U f_k \,|\, g >_{\mathcal{H}_2} U f_k && \text{n. Def. des adjungierten Operators zu } U \\
&= \sum_k p_k | U f_k >< U f_k |\, g && \text{n. Def. des Projektors } | U f_k >< U f_k |
\end{aligned}$$

□

Ist also ein (gemischter) Zustand $\rho_0 = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k | f_k >< f_k |$ auf $\mathcal{H}$ zur Zeit $t = 0$ gegeben als, so hat er sich (ohne Störung durch die Umgebung) zur Zeit t zum Zustand ρ_t auf $\mathcal{H}$ entwickelt:

$$\rho_t = \sum_k p_k | U_t f_k >< U_t f_k | \tag{1.1.19}$$

Dies entspricht W. Heisenbergs Ansatz, in dem Funktionen fest gegeben und Operatoren zeitlich veränderlich sind. Äquivalent dazu können umgekehrt Operatoren als unveränderlich angenommen werden. Die Zeitentwicklung des Zustandsvektors $\Psi \in \mathcal{H}$ wird dann durch die Schrödingergleichung[10] bestimmt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi \tag{1.1.20}$$

Mit dem Planck'schen Wirkungsquantum h ist $\hbar = h/2\pi$. H ist der Hamiltonoperator, der die Energie des Systems beschreibt.

Bemerkenswert ist, dass auch negatives t auftreten kann. Der Zustand eines Quantensystems kann also genauso für die Zukunft vorhergesagt wie in die Vergangenheit zurückverfolgt werden. Obwohl in der Quantenmechanik einerseits i.A. nur Wahrscheinlichkeitsaussagen über den Ausgang von Messungen gemacht werden können, lässt sich andererseits die Schrödingergleichung bzw. (1.1.19) mindestens ebenso gut im Sinne eines „starken Determinismus“[11] interpretieren wie die Gesetze der klassischen Physik.

Unitäre Äquivalenz: [Fic68, 3.2 §7] [Fic01, 25] Wird derselbe unitäre Operator $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ durch die bijektive Abbildung (Konjugation) $A \mapsto UAU^{-1} = UAU^*$

[10] Zu Ehren E. Schrödingers - wie Heisenberg einer der Urahnen der Quantentheorie - sei hier die Wellenfunktion mit Ψ bezeichnet.

[11] „Dem starken Determinismus zufolge wird nicht bloß die Zukunft durch die Vergangenheit determiniert; ein präzises mathematisches System *legt die gesamte Geschichte des Universums* für alle Zeit fest.“ [Pen91, 422] Penrose diskutiert auch ausführlich die zeitlich gerichteten Prinzipien der Kausalität sowie der Entropie [Pen91, 297ff.]

bzw. $\rho \mapsto U\rho U^*$ mit einem selbstadjungierten Operator $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ oder einem Zustand ρ auf $\mathcal{H}_1$ verknüpft, so ist $UAU^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ wieder selbstadjungiert[12] und hat die gleichen Eigenwerte wie A, und $U\rho U^*$ ist ein Zustand auf $\mathcal{H}_2$. Erwartungswerte ändern sich nicht:

$$E_{U\rho U^*}(UAU^*) = E_\rho(A) \tag{1.1.21}$$

Denn da die Spur eines Operators unter Konjugation invariant ist[13], gilt $E_{U\rho U^*}(UAU^*) = \mathrm{tr}(U\rho U^* UAU^*) = \mathrm{tr}(U\rho AU^*) = \mathrm{tr}(\rho A) = E_\rho(A)$. Auch Beziehungen jeweils zwischen mehreren Operatoren oder Zuständen bleiben erhalten.

Bei der Wahl eines konkreten Hilbertraums aus einer Menge isometrisch isomorpher ist man also frei; sie ist eine eher technische Frage. So ist etwa jeder separable Hilbertraum isometrisch isomorph zu $L_2(\Omega)$ mit geeignetem $\Omega \subseteq \mathbb{N}$.

Postulat 5 ***(von Neumannsches Messpostulat)*** *Es sei ρ ein Zustand auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$, und es werde eine Messung an ρ entsprechend einem selbstadjungierten Operator $A = \sum_{j=1}^n z_j \,\mathrm{P}_{D_j}$ durchgeführt ($n \in \mathbb{N}$ oder $n = \infty$). Die Wahrscheinlichkeit, den Eigenwert z_j zu messen, sei mit p_j bezeichnet. Außerdem sei $p_0 := 1 - \sum_{j=1}^n p_j$, $D_0 := \mathcal{H} - \sum_{j=1}^n D_j$, $z_0 = 0$. Dann gilt:*

1. $p_j = \mathrm{tr}(\mathrm{P}_{D_j}\, \rho\, \mathrm{P}_{D_j}) \qquad (j = 0, ..., n)$

2. *Nach der Messung befindet sich das System im Zustand*

$$\rho_j := \frac{1}{p_j}\, \mathrm{P}_{D_j}\, \rho\, \mathrm{P}_{D_j}$$

3. *Liegt keine Information über das Messergebnis vor,*[14] *wird der Zustand beschrieben durch*

$$\rho_A := \sum_{j=0}^n p_j \rho_j = \sum_{j=1}^n \mathrm{P}_{D_j}\, \rho\, \mathrm{P}_{D_j}$$

Lemma 1.1.7 *Mit den Bezeichnungen des von Neumannschen Messpostulats und endlichdimensionalem $\mathcal{H}$ gilt*

$$p_j = \mathrm{tr}(\rho\, \mathrm{P}_{D_j}) \tag{1.1.22}$$

BEWEIS: [Fic01, 21] Sei $(\gamma_l)_{l=1}^N$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$, so dass $(\gamma_l)_{l=1}^m$ Orthonormalbasis in D_j ist. Dann gilt wegen $\mathrm{P}_{D_j}\, \gamma_l = 0$ ($l > m$):

---

[12] $(UAU^*)^* = U^{**}A^*U^* = UAU^*$

[13] Es ist n. Def. des Matrixprodukts $\mathrm{tr}(CC') = \mathrm{tr}(C'C)$. Daraus folgt: $\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr}(ABB^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$. Im vorliegenden Fall ist $B := U$.

[14] Jede Wechselwirkung mit der Umgebung kann als Messung betrachtet werden, auch wenn kein Beobachter das Ergebnis registriert. So wird die philosophische Grundlage der Quantenmechanik klarer; die Physik gibt weniger Anlass, verwickelte Theorien zum Subjekt-Objekt-Verhältnis auf sie anzuwenden. Und auch Schrödingers Katze weiß endlich, ob sie tot oder lebendig ist. Allein schon da sie atmen muss, kann sie nicht vollständig von der Umgebung isoliert werden. Auch mittels Nanotechnologie sollte es schwierig sein, länger als einige Femtosekunden eine kohärente Superposition der Katze einschließlich des verhängnisvollen Mechanismus aufrecht zu erhalten...

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\rho\,\mathrm{P}_{D_j}) &= \sum_{l=1}^{N} <\gamma_l \,|\, \rho\,\mathrm{P}_{D_j}\,\gamma_l> \\
&= \sum_{l=1}^{m} <\gamma_l \,|\, \rho\,\mathrm{P}_{D_j}\,\gamma_l> \\
&= \sum_{l=1}^{m} <\mathrm{P}_{D_j}\,\gamma_l \,|\, \rho\,\mathrm{P}_{D_j}\,\gamma_l> \\
&= \sum_{l=1}^{N} <\mathrm{P}_{D_j}\,\gamma_l \,|\, \rho\,\mathrm{P}_{D_j}\,\gamma_l> \\
&= \sum_{l=1}^{N} <\gamma_l \,|\, \mathrm{P}_{D_j}\,\rho\,\mathrm{P}_{D_j}\,\gamma_l> \\
&= \operatorname{tr}(\mathrm{P}_{D_j}\,\rho\,\mathrm{P}_{D_j}) \\
&= p_j
\end{aligned}
$$

□
Damit sind z.B. Satz 1.1.5 und (1.1.16) anwendbar.

1.2 Operator-Algebren und nochmals verallgemeinerter Zustandsbegriff

In der dargestellten Theorie kommt linearen Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ eine zentrale Bedeutung zu: Observablen, Zustände und Zeitentwicklungen werden durch bestimmte Klassen von Operatoren beschrieben, Erwartungswerte durch Funktionale auf selbstadjungierten Operatoren bestimmt. Die Operatoren sind hier Elemente von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, der Algebra der beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$, mit einer Involution entsprechend Definition 1.1.2. Damit ist $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ein Spezialfall einer (unitalen) *-Algebra. Diese ist die allgemeine Grundlage der Quantenmechanik und -stochastik.

In der Quantenstochastik im engeren Sinn wird der Zustandsbegriff nochmals erweitert:

Definition 1.2.1 *Ein lineares Funktional ω über einer *-Algebra $\mathfrak{A}$ heißt positiv, wenn $\omega(A^*A) \geq 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$. Ist darüber hinaus $\|\omega\| = 1$, so wird ω Zustand genannt.*

[Fic01, 18f.] Das Grundmodell der Quantenstochastik ist also ein Paar $[\mathfrak{A}, \omega]$, wobei $\mathfrak{A}$ eine *-Algebra mit Einselement und ω ein positives, normiertes lineares Funktional auf $\mathfrak{A}$ ist. Die Observablen sind die selbstadjungierten Operatoren der Algebra, und ihre Erwartungswerte sind entsprechend Postulat 3 durch $\omega(A) := \operatorname{tr}(\rho A)$ gegeben (Näheres s. Ende dieses Abschnitts). Auf dieser Grundlage ist eine statistische Beschreibung auch möglich, wenn keine deterministische Entwicklung von Zuständen entsprechend der Schrödingergleichung bzw. Postulat 4 stattfindet. So können etwa Übergänge von reinen zu gemischten Zuständen durch den Einfluss der Umgebung beschrieben werden (Dekohärenz).

Parallel dazu ist im Grundmodell der klassischen Kolmogoroffschen Stochastik eine *-Algebra gegeben als $L := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \,|\, \text{f messbar und beschränkt}\}$, mit einem Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathfrak{F}, P]$. Die Observablen sind die Zufallsgrößen, d.h. reellwertige Funktionen $f \in L$. Da die Involution in L die komplexe Konjugation ist, sind die Observablen ebenfalls die selbstadjungierten Elemente [BR87, 28] der Algebra. Ihre Erwartungswerte sind durch ein Funktional E_P bestimmt mit $E_P(f) := \int_\Omega f(\omega)P(d\omega)$. Der wesentliche Unterschied ist: Im klassischen Fall ist die Algebra kommutativ, in der Quantentheorie jedoch nicht.

Weitere in der Quantenstochastik wichtige *-Algebren sind die von Neumann- [BR87, Definition 2.4.8.] und C^*- Algebren [BR87, Definition 2.1.1.]. Eine C^*-Algebra $\mathfrak{C}$ ist abstrakt definiert als *-Banachalgebra mit der Eigenschaft $\|A^*A\| = \|A\|^2$ $(A \in \mathfrak{C})$. $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ist eine C^*-Algebra, und jede C^*-Algebra kann durch eine Algebra beschränkter Operatoren auf einem Hilbertraum dargestellt werden [BR87, 65], in folgendem Sinn:

Definition 1.2.2 *Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum und π ein *-Homomorphismus von einer C^*-Algebra $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Ein Paar $(\mathcal{H}, \pi)$ wird dann Darstellung von $\mathfrak{C}$ genannt.*

Der Abschluss der Darstellung einer C^*-Algebra in verschiedenen, in dieser Hinsicht gleichwertigen Topologien[15] ist ein Beispiel einer von Neumann-Algebra [BR87, 65]. Allgemein ist sie eine *-Unteralgebra $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, so dass $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}''$ ($\mathfrak{M}'$ ist die Menge aller beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$, die mit jedem Operator in $\mathfrak{M}$ kommutieren).

Definition 1.2.1 passt auf folgende Weise zur Definition eines Zustands nach Postulat 3: Für einen Zustandsvektor $f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1$ ist ein Vektorzustand ω_f der Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ einer C^*-Algebra $\mathfrak{C}$ definiert durch

$$\omega_f(A) := < f \,|\, \pi(A) f > \qquad (A \in \mathfrak{C}) \tag{1.2.1}$$

ω_f ist ein positives lineares Funktional auf $\mathfrak{C}$ mit Norm 1. Wegen Satz 1.1.5 ist $< f \,|\, \pi(A) f > = \mathrm{tr}(|\, f >< f | \, \pi(A))$; $\omega_f(A)$ ist somit Erwartungswert der Observablen $\pi(A)$ im Zustand $\rho = |\, f >< f|$. „Every state over a C^*-algebra is a vector state in a suitable representation.“ [BR87, 49]

Ein Vektorzustand ist ein Spezialfall eines normalen Zustands ω. Dieser ist auf einer von Neumann-Algebra gegeben, wenn ein positiver Spuroporator ρ mit $\mathrm{tr}(\rho) = 1$ existiert, so dass[16]

$$\omega(A) = \mathrm{tr}(\rho A) \tag{1.2.2}$$

Für Zustände auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit endlichdimensionalem $\mathcal{H}$ ist dies immer möglich. Da die Funktionale ω bzw. ω_f (ggf. in einer passenden Darstellung) durch ρ bestimmt sind, kann man ρ mit ihnen identifizieren und als Zustand bezeichnen. Dieser Sprachgebrauch wird im Folgenden wieder verwendet.

[15] der schwachen, starken, *starken, σ-schwachen, σ-starken und σ-*starken [BR87, Theorem 2.4.11]. Der Abschluss umfasst alle Operatoren, die durch die C^*-Algebra-Repräsentanten auf endlichdimensionalen Unterräumen von $\mathcal{H}$ in der Norm-Topologie approximiert werden. Die 6 Topologien haben also „some form of uniformity“ [BR87, 65].

[16] Zu zwei weiteren Kriterien für einen normalen Zustand vgl. [BR87, Theorem 2.4.21 u. Definition 2.4.20].

1.3 Fockräume

1.3.1 Fockräume als direkte Summe von Hilbertraum-Tensorprodukten

[Fic01, 27] [BR87, 143] [BR96, 5.2.1] Der quantenmechanische Zustand eines einzelnen Teilchens ist als Projektor auf einen Zustandsvektor im separablen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ gegeben. Zur Beschreibung von n Teilchen und ihrer Wechselwirkung benötigt man das n-fache Tensorprodukt $\mathcal{H}^{n\otimes}$ des ursprünglichen Hilbertraums. Dieses wird hier aufgefasst als Vervollständigung des algebraischen Tensorprodukts in der Norm, die durch das folgende Skalarprodukt zweier Elemente $\psi_n = \bigotimes_{k=1}^{n} f_k$ und $\psi'_n = \bigotimes_{k=1}^{n} g_k$ $(n \in \mathbb{N})$ gegeben ist :

$$< f_1 \otimes ... \otimes f_n \,|\, g_1 \otimes ... \otimes g_n > := < f_1 \,|\, g_1 > ... < f_n \,|\, g_n > \tag{1.3.1}$$

$\mathcal{H}^{0\otimes}$ ist als der zugrunde liegende Körper $\mathbb{C}$ definiert.

Ist die Zahl der Teilchen nicht festgelegt, so können Zustände durch Vektoren der direkten Summe $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{n\otimes}$ definiert werden. Derartige Vektoren sind Folgen $(\psi_n)_{n=0}^{\infty}$ von Vektoren $\psi_n \in \mathcal{H}^{n\otimes}$, wobei nur eine endliche Zahl von ψ_n ungleich 0 ist. Ein Skalarprodukt ist komponentenweise definiert:

$$< (\psi_n) \,|\, (\psi'_n) > := \sum_{n=0}^{\infty} < \psi_n \,|\, \psi'_n >_{\mathcal{H}^{n\otimes}} \tag{1.3.2}$$

Die Vervollständigung dieser direkten Summe bezüglich der durch das Skalarprodukt gegebenen Norm ist der separable Hilbertraum

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \widetilde{\bigoplus}_{n\geq 0} \mathcal{H}^{n\otimes} \tag{1.3.3}$$

Eine äquivalente Definition ist

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \{(\psi_n)_{n=0}^{\infty} \,|\, \psi_n \in \mathcal{H}^{n\otimes}, \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi_n\|^2 < \infty\} \tag{1.3.4}$$

$\mathcal{H}^{n\otimes}$ kann mit dem abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{F}(H)$ identifiziert werden, bei dem nur das n-te Folgenglied von 0 verschieden ist. $\mathcal{H}^{n\otimes}$ wird n-Partikel-Unterraum genannt, seine Elemente n-Partikel-Vektoren. (1,0,0,...) ist der Vakuumvektor.

Ist $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^\nu)$, so ist $L_2(\mathbb{R}^\nu) \otimes L_2(\mathbb{R}^\nu) \cong L_2(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu) = L_2(\mathbb{R}^{2\nu})$. Dann wird

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \widetilde{\bigoplus}_{n\geq 0} L_2(\mathbb{R}^{n\nu}) \tag{1.3.5}$$

In der Quantenphysik sind gleichartige Teilchen ununterscheidbar. Dies drückt sich darin aus, dass messbare Größen unabhängig von der Vertauschung der Koordinaten zweier Teilchen sind. Für den Erwartungswert eines Messoperators A bezüglich eines Systems[17] im Zustand $|\,\psi_n >< \psi_n|$ gilt $E_{|\,\psi_n >< \psi_n|}(A) = < \psi_n \,|\, A\psi_n >$. Dieser ändert

[17] Man kann auch wieder $\mathcal{H}^{n\otimes}$ als den in den Postulaten vorausgesetzten separablen Hilbertraum auffassen. Dann gilt Satz 1.1.5 für die Mehrteilchen-Funktion $\psi_n \in \mathcal{H}^{n\otimes}$.

sich nicht, wenn ψ_n bei Vertauschung der Koordinaten zweier Partikel konstant bleibt oder nur das Vorzeichen wechselt. Das Pauli-Prinzip fordert daher, dass nur solche Lösungen der Schrödinger-Gleichung zugelassen sind. Im Fall von Bosonen[18] ist jede Komponente ψ_n eines Vektors $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ symmetrisch unter Vertauschung zweier Koordinaten, im Fall von Fermionen sind alle ψ_n anti-symmetrisch. Durch Operatoren $P_\pm$ werden entsprechende Unterräume von $\mathcal{H}^{n\otimes}$ konstruiert:

$$P_+(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n) := \frac{1}{n!}\sum_\pi f_{\pi_1} \otimes f_{\pi_2} \otimes \cdots \otimes f_{\pi_n} \tag{1.3.6}$$

$$P_-(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n) := \frac{1}{n!}\sum_\pi \varepsilon_\pi f_{\pi_1} \otimes f_{\pi_2} \otimes \cdots \otimes f_{\pi_n} \tag{1.3.7}$$

Summiert wird über alle Permutationen $S_n \ni \pi : (1, ..., n) \mapsto (\pi_1, ..., \pi_n)$. Es ist $\varepsilon_\pi := 1$ für gerade Permutationen $\pi \in A_n$, $\varepsilon_\pi := -1$ für $\pi \in S_n \setminus A_n$. „Extension by linearity yields two densely defined operators with $\|P_\pm\| = 1$ and the $P_\pm$ extend by continuity to bounded operators of norm one." [BR96, 7][19] Der **Bose-Fockraum** $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ sowie der **Fermi-Fockraum** $\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ sind dann

$$\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}) := P_\pm \mathcal{F}(\mathcal{H}) \tag{1.3.8}$$

Der Bose-Fockraum wird mit $\Gamma(\mathcal{H})$ bezeichnet.

1.3.2 2. Quantisierung

Die Struktur eines Fockraums erlaubt die Fortsetzung von Operatoren auf $\mathcal{H}$ auf den gesamten Raum $\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$. Während die 1. Quantisierung den Übergang von der klassischen zur Quantenmechanik beschreibt, ist die Methode der 2. Quantisierung wesentlich für den Übergang von einer Einteilchen- zur Mehrteilchen-Quantentheorie, also zur Theorie von Ensembles. Falls nicht alle Wahrscheinlichkeiten, die Eigenwerte eines Operators H zu messen, 0 sind oder ein Wert 1 ist, sind diese für einen einzelnen Versuch ohne Bedeutung. Statistische Aussagen haben streng genommen nur Sinn, wenn ein Versuch mehrfach unabhängig realisiert wird oder ein sogenannter kohärenter Zustand (s. Fußnote 3 in Kapitel 3) vorliegt. So haben auch die Begriffe reiner und gemischter Zustand erst ihre volle Bedeutung, wenn sie sich auf einzelne Partikel in einem Ensemble beziehen [Sak94, 24 u. 175ff.].

[18] Nach dem Wert ihres Spin teilt man alle Elementarteilchen ein in:

- Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$ sind die Materieteilchen: Elektron, μ- und τ-Teilchen und die 3 zugehörigen Neutrinos, die 6 Quarks, außerdem die entsprechenden Antimaterie-Teilchen wie das Positron.
- Bosonen vermitteln Wechselwirkungen und haben ganzzahligen Spin: Photon, Gluonen, $W^\pm$ und Z^0 mit Spin 1. Bisher werden erst theoretisch gefordert: Higgs-Teilchen (Spin 0) und Graviton (Spin 2) [Knö02, 149]

Bosonen unterliegen der Bose-Einstein-, Fermionen der Fermi-Dirac-Statistik.

[19] Extension by continuity: „Let X and Y be normed spaces, and suppose Y is complete. Every continuous linear operator U_0 from $\Omega \subset X$ into Y has a unique continuous linear extension U to the closure $\bar{\Omega}$ of Ω, and $\|U\| = \|U_0\|$" [KA82, ch. V, §8, Theorem 2].

Zu einem selbstadjungierten Operator H auf $\mathcal{H}$ wird ein Operator H_n auf $\mathcal{H}_{\pm}^{n\otimes}$ definiert mit $H_0 = 0$ und

$$H_n(P_{\pm}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) := P_{\pm}\Big(\sum_{j=1}^{n} f_1 \otimes \cdots \otimes Hf_j \otimes \cdots \otimes f_n\Big) \tag{1.3.9}$$

„The direct sum of the H_n is essentially selfadjoint because (1) it is symmetric and hence closable, (2) it has a dense set of analytic vectors formed by finite sums of (anti-) symmetrized products of analytic vectors of H. The selfadjoint closure of this sum is called the second quantization of H and is denoted by $d\Gamma(H)$.“ [BR96, 8]

$$d\Gamma(H) := \overline{\bigoplus_{n\geq 0} H_n} \tag{1.3.10}$$

Ist $f_1 = ... = f_n$ (oder liegt ein kohärenter Zustand vor) und ist H ein eindimensionaler Projektor, so entspricht eine Messung nach $\frac{1}{n}H_n$ der Bildung von relativen Häufigkeiten. Es wird gezählt, wie oft ein H entsprechendes Ereignis im Verhältnis zu n eintritt.

Zu einem unitären Operator U wird ein Operator U_n definiert mit $U_0 = \mathbb{1}$ (identischer Operator) und

$$U_n(P_{\pm}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) := P_{\pm}(Uf_1 \otimes \cdots \otimes Uf_n) \tag{1.3.11}$$

Werden die Operatoren U_n noch stetig erweitert, so erhält man die 2. Quantisierung:

$$\Gamma(U) := \bigoplus_{n\geq 0} U_n \tag{1.3.12}$$

Die 2. Quantisierung unitärer Operatoren tritt etwa in folgendem wichtigem Fall auf (vgl. [BR96, 8]): Wird die Dynamik eines Zustands auf $\mathcal{F}_{\pm}(\mathcal{H})$ durch den Hamiltonoperator $d\Gamma(H)$ bestimmt, so entspricht dem ein unitärer Operator $\Gamma(U_t)$. Analog zu Postulat 4 gilt

$$\Gamma(U_t) = e^{itd\Gamma(H)}. \tag{1.3.13}$$

1.3.3 Fockräume und Punktprozesse

[FF86] [FFL99] [Fic00] [FO01] Eine andere Darstellung des Fockraums benutzt die Punktprozesstheorie, die etwa in [MKM74] ausführlich dargelegt wird. Es sind zunächst gegeben:

- G: beliebiger vollständiger separabler metrischer Raum, z.B. $\mathbb{R}^k$ oder $\mathbb{R}^k \times \{0,1\}^n$.
- $\mathcal{G}$: σ-Algebra der Borel-Mengen auf G.
- $M = \{\varphi \text{ Maß auf } [G,\mathcal{G}] :\ \varphi(A) \in \mathbb{N}_0 \text{ für } A \in \mathcal{G}\}$
  M ist also die Menge der endlichen Zählmaße auf $[G,\mathcal{G}]$ und disjunkte Vereinigung der Mengen $M_n := \{\varphi \in M :\ \varphi(A) = n \text{ für } A \in \mathcal{G}\}$ $(n = 0, 1, ...)$. Die Definition kann auch auf lokal endliche Maße ($\varphi(B) < \infty$ für beschränkte Mengen $B \in \mathcal{G}$) ausgeweitet werden, vgl. z.B. [FF91, 317].

- $\mathfrak{M}$: Kleinste σ-Algebra auf M, so dass für alle beschränkten $B \in G$ die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi(B)$ messbar ist. Dies entspricht der Bedingung: Alle Mengen der Form $\{\varphi \in M | \, \varphi(B) = n\}$ sind in $\mathfrak{M}$ enthalten [FFL99, 2]. Für endliche Zählmaße erhält man die gleiche σ-Algebra, wenn man beliebige B in der Definition zulässt.

Satz 1.3.1 *Sei δ_a das Dirac-Maß in a. Für alle $\varphi \in M$ ist die Menge $A = \{a \in G \,|\, \varphi(\{a\}) > 0\}$ endlich (höchstens abzählbar im Fall eines lokal endlichen Zählmaßes), und es gilt*

$$\varphi = \sum_{a \in A} \varphi(\{a\}) \delta_a$$

BEWEIS: [MKM74, 8] □

Auf der σ-Algebra $\mathfrak{M}$ der Zählmaße werden Wahrscheinlichkeitsmaße P betrachtet, so dass ein zufälliges Zählmaß eine **zufällige Punktkonfiguration** repräsentiert, beispielsweise:

- Diskrete Zeitpunkte, zu denen ein Elektron an einer Kathode emittiert wird.
- Einen Zustand im Prozess der Vermehrung einer Zellkultur (Erneuerungsprozess). Dabei kann ein Raumpunkt im Verlauf der Entwicklung auch mehrfach besetzt werden ($\varphi(\{a\}) > 1$).

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $[M, \mathfrak{M}]$ wird **Punktprozess** genannt.

Definition 1.3.2 *Sei o die leere Punktkonfiguration, d.h. das Nullmaß mit $\mathsf{o}(G) = 0$, μ ein lokal endliches, diffuses Maß auf $[G, \mathcal{G}]$, χ_Y die charakteristische Funktion zur Menge $Y \subset M$. Ist auf M die σ-Algebra $\mathfrak{M}$ definiert, so kann das* **Fockmaß** *F_μ eingeführt werden:*

$$F_\mu(Y) := \chi_Y(\mathsf{o}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{G^n} \mu^n(d[x_1, ..., x_n]) \, \chi_Y(\sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j}) \qquad (Y \in \mathfrak{M}) \quad (1.3.14)$$

Dass μ diffus ist (meist wird das Lebesgue-Maß vorausgesetzt), bedeutet $\mu(\{x\}) = 0 \; (x \in G)$. Daraus lässt sich schließen, dass F_μ auf der Menge

$$\hat{M} := \{\varphi \in M | \, \forall x \in G : \; \varphi(\{x\}) \leq 1\} \quad (1.3.15)$$

der einfachen endlichen Punktkonfigurationen konzentriert ist. Um im Folgenden diese Definition näher zu untersuchen, kann daher $\varphi \in \hat{M}$ vorausgesetzt werden.

Zunächst sei eine Abbildung $t_n : \; G^n \to M_n$ folgendermaßen definiert:

$$[x_1, ..., x_n] \mapsto \varphi = \sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j} \quad (1.3.16)$$

t_n ordnet jedem n-Tupel von Punkten des zugrunde liegenden „physikalischen“ Raums G (Phasenraum) ein durch die n Punkte definiertes Zählmaß zu. Dabei wird der Raum symmetrisiert: Die Reihenfolge der δ_{x_j} spielt bei den Punktkonfigurationen wegen der Kommutativität der Addition keine Rolle.

Da $Y \in \mathfrak{M}$ disjunkte Vereinigung der Mengen von n-Punkt-Konfigurationen $Y_n := Y \cap \hat{M}_n$ ist, kann Definition 1.3.2 umgeformt werden:

$$F_\mu(Y) = \chi_Y(\mathfrak{o}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{G^n} \mu^n(d[x_1, ..., x_n])\, \chi_{Y_n}(\sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j})$$

Mit dem Übertragungssatz der Maßtheorie erhält man weiter

$$F_\mu(Y) = \chi_Y(\mathfrak{o}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\hat{M}_n} \mu^n \circ t_n^{-1}(d\varphi)\, \chi_{Y_n}(\varphi)$$

Dies ist nach Definition des Integrals von χ_{Y_n} und wegen $Y = \bigcup_{n\geq 0} Y_n$:

$$F_\mu(Y) = \chi_Y(\mathfrak{o}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\mu^n \circ t_n^{-1}(Y) \tag{1.3.17}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} F_\mu(M) &= \chi_M(\mathfrak{o}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\mu^n \circ t_n^{-1}(M) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\mu^n(G^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(G)^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{\mu(G)} \end{aligned} \tag{1.3.18}$$

Ist daher μ endlich, so auch F_μ. Im anderen Fall ist zumindest $F_\mu(M) = \infty$. Da jedoch μ lokal endlich ist, ist F_μ σ-endlich: Es existiert eine Folge (Y_n) aus $\mathfrak{M}$ mit $Y_n \uparrow M$ und $F_\mu(Y_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$.

Definition 1.3.3 *Sei G ein vollständiger separabler metrischer Raum, $\mathcal{G}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen auf G, M die Menge der (lokal) endlichen Zählmaße auf $[G, \mathcal{G}]$ mit σ-Algebra $\mathfrak{M}$ und Fockmaß F_μ entsprechend Definition 1.3.2. Es heißt*

symmetrischer Fockraum über G $\qquad \mathcal{M} := L_2(M, \mathfrak{M}, F_\mu)$

$\mathcal{M}$ ist isometrisch isomorph zum Bose-Fockraum $\Gamma(L_2(G)) = P_+\mathcal{F}(L_2(G))$ entsprechend (1.3.8) [FF87, Remark 2.5]. Dies wird in Abschnitt 2.2 für $\mathcal{H} = L_2(\{0, 1\})$ bewiesen und gleichzeitig ein vollständiges Orthonormalsystem in $\Gamma(L_2(\{0, 1\}))$ konstruiert.

$\Gamma(L_2(G))$ (bzw. auch $\Gamma(\mathcal{H})$ mit einem beliebigen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$) wird ebenfalls symmetrischer Fockraum genannt. Man spricht dann von unterschiedlichen Darstellungen des symmetrischen Fockraums.

Kapitel 2

Strukturen auf Qubit-Räumen und deren Tensorprodukten

2.1 Der n-Qubit-Raum

In diesem Kapitel sollen die spezielleren mathematischen Mittel zur Verfügung gestellt werden, um in Kapitel 3 das in der Einleitung angesprochene Modell für Informationsprozesse konstruieren zu können. Der zugrunde liegende Raum ist das dreifache Tensorprodukt eines separablen Hilbertraums. U.a. da sich die binäre Grundlage der Datenverarbeitung durchgesetzt hat und auch Ausgangspunkt für Modelle, Algorithmen und erste Experimente zu Quantencomputern ist, erscheinen Qubit-Räume als naheliegend. Der 1-Qubit-Raum $\mathcal{H} := L_2(\{0,1\})$ wurde bereits eingeführt. n Qubit ($n \in \mathbb{N}$) werden somit entsprechend Abschnitt 1.3.1 beschrieben als ein Vektor im Hilbertraum $\mathcal{H}^{n\otimes} \cong L_2(\{0,1\}^n)$.

Eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}^{0\otimes} := \mathbb{C}$ besteht aus der komplexen Zahl 1. Seien $\epsilon := [\epsilon_1, ..., \epsilon_n] \in \{0,1\}^n$, $m := [\omega_1, ..., \omega_n] \in \{0,1\}^n$, $\Delta_0(\epsilon_k) := \delta_{0\epsilon_k}$, $\Delta_1(\epsilon_k) := \delta_1(\epsilon_k)$. Die orthogonale Standardbasis $(\Delta_m)_{m\in\{0,1\}^n}$ in $\mathcal{H}^{n\otimes}$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta_m &:= \Delta_{\omega_1} \otimes ... \otimes \Delta_{\omega_n} \qquad (\omega_k \in \{0,1\}), \text{ und} \\ \Delta_{\omega_1} \otimes ... \otimes \Delta_{\omega_n}(\epsilon_1...\epsilon_n) &= \prod_{k=1}^{n} \Delta_{\omega_k}(\epsilon_k) = \delta_{m\epsilon} \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

In der Physik und Quanteninformatik sind für $\Delta_{\omega_1} \otimes ... \otimes \Delta_{\omega_n}$ die Schreibweisen

$$|\,\omega_1 > ... |\,\omega_n > \text{ oder } |\,\omega_1 ... \omega_n > \tag{2.1.2}$$

üblich. Solche Vektoren in $\mathcal{H}^{n\otimes}$ werden als (geordnete) Folgen von Qubits bezeichnet; dieser Sprachgebrauch wird hier jedoch nicht übernommen, da erst die Elemente des Fockraums $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ Folgen im mathematischen Sinn sind. Die Dimension des n-Qubit-Raums ist offensichtlich

$$\dim L_2(\{0,1\})^{n\otimes} = 2^n \tag{2.1.3}$$

2.2 Der symmetrische n-Qubit-Raum

Nun wird - wieder für $\mathcal{H} = L_2(\{0,1\})$ - der symmetrische n-Qubit-Raum $\mathcal{H}^{n\otimes}_{\text{sym}}$ näher beschrieben. Dies geschieht im allgemeinen Rahmen des symmetrischen Fockraums in der Darstellung $\Gamma(\mathcal{H}) = \widetilde{\bigoplus}_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}^{n\otimes}_{\text{sym}}$. Dabei ist auch die Darstellung als $L_2(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_2(M_n)$ entsprechend Abschnitt 1.3.3 nützlich. Ziel des gesamten jetzigen Abschnitts ist es, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 2.2.1 *Ein vollständiges Orthonormalsystem in* $\Gamma(L_2(\{0,1\}))$ *ist gegeben durch*

$$\left(\beta^n_j\right)_{j=0\ldots n}^{n\in\mathbb{N}_0} \textit{ mit } \beta^0 := 1 \in \mathbb{C}$$
$$\beta^n_j := \frac{1}{\sqrt{\binom{n}{j}}} \sum_{\substack{\omega_1,\ldots,\omega_n\in\{0,1\} \\ \sum_{k=1}^n \omega_k = j}} |\,\omega_1 \ldots \omega_n>$$

Zum Beweis dieses Satzes wird im Folgenden die isometrische Isomorphie beider Darstellungen des symmetrischen Fockraums bewiesen und ausgenutzt.

Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 1.3.3 ist nun speziell:

- $G := \{0,1\}$
- $M := M(\{0,1\}) := \{\varphi\,|\varphi$ ganzzahliges Maß auf $\{0,1\}\,\}$,
  $M \ni \varphi = m_0\delta_0 + m_1\delta_1 \; (m_0, m_1 \in \mathbb{N}_0)$
- $M_n \ni \varphi^n_j := (n-j)\delta_0 + j\delta_1 \; (n \in \mathbb{N}_0,\; j = 0,\ldots,n)$
  Somit gibt es $n+1$ verschiedene Punktkonfigurationen in M_n, $|M_n| = n+1$
- $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(M)$

Das Fockmaß der leeren Punktkonfiguration ist 1. Für das Fockmaß einer einzelnen, nichtleeren m-Punktkonfiguration $\varphi = m_0\delta_0 + m_1\delta_1$ ergäbe sich entsprechend (1.3.17) (dabei wird das Maß μ auf der diskreten Menge $\{0,1\}$ als Zählmaß angenommen (1.1.3)):

$$\begin{aligned}
F_\mu(\{\varphi\}) &= \chi_{\{\varphi\}}(\mathfrak{o}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\mu^n \circ t_n^{-1}(\{\varphi\}) \\
&= 0 + \frac{1}{m!}\,\mu^m \circ t_m^{-1}(\{\varphi\}) \\
&= \frac{1}{m!}\,\mu^m\{[x_1,\ldots,x_m]|\; t_m([x_1,\ldots,x_m]) = \varphi\} \\
&= \frac{1}{m!}\frac{m!}{m_0!\,m_1!} \qquad \left(\frac{m!}{m_0!\,m_1!} \text{ ist die Anzahl unterschiedlicher } m\text{-Tupel}\right) \\
&= \frac{1}{m_0!\,m_1!}
\end{aligned}$$

Der Faktor $\frac{1}{n!}$ dient im Fall eines diffusen Maßes μ dazu, das Fockmaß zu „symmetrisieren“: für eine einfache n-Punktkonfiguration φ gibt es $n!$ n-Tupel mit $t_n([x_1,\ldots,x_n]) =$

φ, nicht jedoch für Mehrfach-Punktkonfigurationen (m_0 oder $m_1 \neq 0, 1$). Da diese bei diskretem Maß μ keine F_μ-Nullmengen wären, F_μ also nicht auf der Menge der einfachen Konfigurationen konzentriert wäre, soll stattdessen hier das einfache Zählmaß ν auf $\mathfrak{M}$ verwendet werden, für das $\nu(\{\varphi\}) = 1$ gilt.[1] Jedoch ist

$$L_2(M, \mathfrak{M}, F_\mu) \cong L_2(M, \mathfrak{M}, \nu) \tag{2.2.1}$$

Dieser Raum $L_2(M, \mathfrak{M}, \nu)$ wird nun vorausgesetzt und wieder abgekürzt als $L_2(M)$ geschrieben. Orthonormalbasen in seinen direkten Summanden $L_2(M_n)$ sind $(\gamma_j^n)_{j=0\ldots n}$, definiert durch

$$\gamma_j^n(\varphi) := \delta_{\varphi_j^n \varphi} \qquad (\varphi \in M_n) \tag{2.2.2}$$

$$\Rightarrow \dim L_2(M_n) = n + 1 \tag{2.2.3}$$

Lemma 2.2.2 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$U_n : L_2(M_n) \to L_2(\{0,1\})^{n\otimes}_{\mathrm{sym}}$$

$$U_n h(\epsilon_1, ..., \epsilon_n) := \frac{1}{\sqrt{\binom{n}{\sum_k \epsilon_k}}}\, h\Big(\sum_{k=1}^n \delta_{\epsilon_k}\Big) \qquad (\epsilon_1, ..., \epsilon_n \in \{0,1\})$$

ein unitärer Operator.

BEWEIS: U_n ist surjektiv, denn die Elemente von $L_2(\{0,1\})^{n\otimes}_{\mathrm{sym}}$ sind die unter Permutationen der $\epsilon_1 ... \epsilon_n$ invarianten Funktionen. Dies trifft auch auf alle $h \in L_2(M_n)$ zu. Da eine Funktion h auf den Punktkonfigurationen $\sum_{k=1}^n \delta_{\epsilon_k} \in M_n$ mit allen möglichen Werten der ϵ_k definiert ist, besteht eine bijektive Zuordnung zwischen h und f. Außerdem ist U_n offensichtlich linear.

---

[1] Eine Erweiterung von Def. 1.3.2 auf den diskreten Fall macht folgenden Sinn:

$$\begin{aligned} F_\mu(M) &= \sum_\varphi F_\mu(\{\varphi\}) = \sum_{m_0, m_1 = 0}^{\infty} F_\mu(m_0\delta_0 + m_1\delta_1) \\ &= \sum_{m_0, m_1 = 0}^{\infty} \frac{1}{m_0!}\frac{1}{m_1!} = \mathrm{e}^2 \\ &= \mathrm{e}^{\mu(\{0,1\})} \qquad \text{(s. 1.3.18)} \end{aligned}$$

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $[M, \mathfrak{M}]$ kann definiert werden als

$$Q(\{\varphi\}) = \frac{F_\mu}{F_\mu(M)}(\{\varphi\}) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{m_0!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-1}}{m_1!}$$

Dieses entspricht einem Poisson'schen Punktprozess mit Intensität 1, die Belegung der Punkte 0 und 1 ist also unabhängig poissonverteilt.

U ist Isometrie, denn $\forall h \in L_2(M_n)$:

$$\begin{aligned}
\|U_n h\|^2 &= < U_n h \,|\, U_n h > \\
&= \sum_{\epsilon_1,...,\epsilon_n \in \{0,1\}} |\, U_n h(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)|^2 \\
&= \sum_{\epsilon_1,...,\epsilon_n \in \{0,1\}} \frac{1}{\binom{n}{\sum_k \epsilon_k}} \,|\, h\Big(\sum_{k=1}^{n} \delta_{\epsilon_k}\Big)|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{\epsilon_1,...,\epsilon_n \in \{0,1\} \\ \sum_{k=1}^n \epsilon_k = j}} \frac{1}{\binom{n}{j}} |h(\varphi_j^n)|^2, \qquad \text{denn für } \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k = j \text{ ist } \sum_{k=1}^{n} \delta_{\epsilon_k} = \varphi_j^n. \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{j}} |h(\varphi_j^n)|^2 \sum_{\substack{\epsilon_1,...,\epsilon_n \in \{0,1\} \\ \sum_{k=1}^n \epsilon_k = j}} 1 \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{j}} |h(\varphi_j^n)|^2 \binom{n}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \big|h(\varphi_j^n)\big|^2 \\
&= < h \,|\, h > = \|h\|^2
\end{aligned}$$

□

Satz 2.2.3 *Es existiert genau ein linearer Operator* $U : L_2(M) \to \Gamma(L_2(\{0,1\}))$ *mit*

$$U\gamma_j^n = \beta_j^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ j = 0, ..., n), \tag{2.2.4}$$

und U *ist unitär.*

Beweis: $L_2(M_0) = L_2(\varphi^0) \cong \mathbb{C} = L_2(\{0,1\})^{0\otimes} = L_2(\{0,1\})^{0\otimes}_{\mathrm{sym}}$. Sei $U_0 : L_2(M_0) \to L_2(\{0,1\})^{0\otimes}$ definiert durch $U_0 h(1) = h(\varphi^0)$; etwas verallgemeinert gesagt ist also $U_0 = \mathbb{1}_{\mathbb{C}}$, d.h. der identische Operator auf $\mathbb{C}$. U_n sei wie in Lemma 2.2.2 gegeben.

Da $L_2(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_2(M_n)$, kann $g \in L_2(M)$ notiert werden als

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{M_n} g, \qquad \text{und}$$

$$(\chi_{M_n} g)(\varphi) = g|_{M_n}(\varphi) \qquad (g|_{M_n} \in L_2(M_n),\ \varphi \in M_n)$$

Dann ist folgende Definition eines Operators $U : L_2(M) \to \Gamma(L_2(\{0,1\}))$ sinnvoll, und dieser ist unitär:

$$\begin{aligned}
U &:= \bigoplus_{n=0}^{\infty} U_n \\
Ug &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\chi_{M_n} g)
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

$\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}_0\; \forall j = 0...n$:

$$U\gamma_j^n = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\chi_{M_k}\gamma_j^n) = U_n\gamma_j^n, \qquad \text{da } \chi_{M_k}\gamma_j^n = 0 \text{ für } k \neq n.$$

(2.2.4) ist für $n = 0$ erfüllt: $U_0\gamma^0 = \beta^0 = 1 \in \mathbb{C}$.
Weiter ist $\forall\, n \in \mathbb{N}\; \forall\, [\epsilon_1, ..., \epsilon_n] \in \{0,1\}^n$:

$$\begin{aligned} U_n\gamma_j^n(\epsilon_1, ..., \epsilon_n) =& \frac{1}{\sqrt{\binom{n}{\sum_k \epsilon_k}}}\; \gamma_j^n\big(\sum_{k=1}^{n} \delta_{\epsilon_k}\big) \\ =& \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\binom{n}{j}}} & \text{falls } \sum_{k=1}^n \delta_{\epsilon_k} = \varphi_j^n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \epsilon_k = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ =& \frac{1}{\sqrt{\binom{n}{j}}} \sum_{\substack{\omega_1,...,\omega_n \in \{0,1\} \\ \sum_{k=1}^n \omega_k = j}} \delta_{[\omega_1,...,\omega_n],\, [\epsilon_1,...,\epsilon_n]} \\ =& \Big(\frac{1}{\sqrt{\binom{n}{j}}} \sum_{\substack{\omega_1,...,\omega_n \in \{0,1\} \\ \sum_{k=1}^n \omega_k = j}} |\, \omega_1 ... \omega_n > \Big)(\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \\ =& \beta_j^n(\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \end{aligned}$$

Da eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen durch ihre Werte auf einer Basis eindeutig bestimmt ist, existiert höchstens ein U mit der geforderten Eigenschaft. Insgesamt ist also U durch die Bedingung $U\gamma_j^n = \beta_j^n$ eindeutig bestimmt. $\square$

BEWEIS VON SATZ 2.2.1: $(\gamma_j^n)_{j=0..n}^{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $L_2(M)$. Durch den nach Satz 2.2.3 gegebenen unitären Operator U wird dieses in eine Orthonormalbasis in $\Gamma(L_2(\{0,1\}))$ abgebildet, und zwar in $(\beta_j^n)_{j=0..n}^{n\in\mathbb{N}_0}$. $\square$

Aus Satz 2.2.1 ergeben sich unmittelbar zwei wichtige Folgerungen (s. Abschnitt 3.2):

- **Folgerung 1**: Die Dimension des symmetrischen n-Qubit-Raums $L_2(\{0,1\})_{\text{sym}}^{n\otimes}$ ist $n+1$.
- **Folgerung 2**: Der für eine mögliche Anwendung des Teleportationsmodells in der Genetik relevante symmetrische Teilraum des $L_2(\{0,1\}^3)$ hat die Dimension $4 = 3+1$ und ist daher isometrisch isomorph zu $L_2(\{0,1\}^2)$, der die Dimension 2^2 besitzt.

2.3 Gruppenstrukturen auf $\mathbf{\Omega = \{0,1\}^n}$

Nun wird wieder der in Abschnitt 2.1 eingeführte Raum $L_2(\Omega)$ mit $\Omega = \{0,1\}^n,\ k, j, m, r \in \Omega$ vorausgesetzt. Ω wird zu einer kommutativen Gruppe mit einer Verknüpfung $\oplus$, die auf eine der folgenden Weisen definiert ist:

1. $\Omega_1 := \{0,1\}^n$ mit einer komponentenweise definierten Verknüpfung $+^n$:

$$\begin{aligned} &[\omega_1,...,\omega_n] +^n [\epsilon_1,...,\epsilon_n] \\ := &[\omega_1+\epsilon_1 \bmod 2, ..., \omega_n+\epsilon_n \bmod 2] \qquad (\omega_j,\ \epsilon_j \in \{0,1\}) \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

$$\Omega_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ (n-faches Produkt)} \tag{2.3.2}$$

Mit $e_k := [0,...,0,1,0,...,0]$ (1 an der k-ten Stelle) sind Untergruppen von Ω_1 (außerdem die von ihren Vereinigungen erzeugten Untergruppen):

$$H_k^1 := < e_k > = \{[0,...,0], e_k\} \qquad (k=1,...,n) \tag{2.3.3}$$

2. Die $N = 2^n$ Elemente von $\Omega_2 = \{0,1\}^n$ werden entsprechend der Addition $\bmod N$ von Dualzahlen verknüpft. Die folgende Abbildung ist bijektiv:

$$\begin{aligned} d : \{0,...,N-1\} &\longrightarrow \{0,1\}^n \\ j &\longleftrightarrow [d_1(j),...,d_n(j)] \\ j &= \sum_{k=1}^{n} d_k(j) 2^{n-k} \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Die Addition $+_n$ auf Ω_2 ist dann definiert als

$$\begin{aligned} &[\omega_1,...,\omega_n] +_n [\epsilon_1,...,\epsilon_n] \\ := &d\Big(\big[d^{-1}([\omega_1,...,\omega_n]) + d^{-1}([\epsilon_1,...,\epsilon_n])\big] \bmod N\Big) \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Die Gruppe Ω_2 ist zyklisch von Ordnung N und wird von $e_n = [0,...,0,1]$ erzeugt. Somit:

$$\Omega_2 \cong \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} \tag{2.3.6}$$

Außer für $k = n$ sind die Untergruppen H_k^1 von Ω_1 keine Untergruppen von Ω_2, jedoch die von ihrem nichttrivialen Element erzeugten zyklischen Gruppen

$$H_k^2 := < e_k > \qquad (k=1,...,n) \tag{2.3.7}$$

- **Bemerkung 1:** $H_1^2 \subset H_2^2 \subset ... \subset H_n^2 = \Omega_2$. Dagegen sind die H_k^1 paarweise disjunkt.

- **Bemerkung 2:** Ω_2 dient der Modellierung einer einfachen, Ω_1 der einer n-fach wiederholten Teleportation.

2.4 Orthonormalbasen und parametrisierte Gruppen unitärer Operatoren auf $\mathbf{L_2}(\Omega)$

Der folgende Satz bietet die Grundlage zu einer Verallgemeinerung des in der Literatur dargestellten[2] Teleportationsmodells.

[2]Zu dem Ansatz in [FO01, 2.] s. S. 38. Vgl. außerdem S. 34.

Satz 2.4.1 *Es seien $(\Omega, \oplus)$ eine endliche abelsche Gruppe und $(\gamma_m)_{m\in\Omega}$ eine Orthonormalbasis in $L_2(\Omega)$. Dann existiert zu jedem $k \in \Omega$ genau ein linearer Operator U_k auf $L_2(\Omega)$, so dass für alle $m \in \Omega$ gilt*

$$U_k^*\gamma_m = \gamma_{m\oplus k} \tag{2.4.1}$$

Die so definierten Operatoren U_k sind unitär und bilden eine parametrisierte Gruppe $(U_k)_{k\in\Omega} \cong \Omega$.

BEWEIS: Klar ist, dass durch diese Bedingung für alle $k \in \Omega$ eine Isometrie U_k^* definiert wird. Diese ist durch ihre Werte auf $(\gamma_m)_{m\in\Omega}$ eindeutig bestimmt.

Durch das Produkt der Operatoren ist eine Gruppenstruktur auf der Menge $\{U_k^*\}$ gegeben. Diese entspricht der Verknüpfung $\oplus$ in Ω:

$$\begin{aligned}\forall k, j, m \in \Omega : U_k^* U_j^* \gamma_m &= U_k^* \gamma_{m\oplus j} \\ &= \gamma_{(m\oplus j)\oplus k} \\ &= \gamma_{m\oplus(k\oplus j)} \qquad \text{Kommutativität von } (\Omega, \oplus) \\ &= U_{k\oplus j}^* \gamma_m\end{aligned}$$

Somit existiert ein Gruppenisomorphismus $g : \Omega \to \{U_k^*\}$ mit $g(k) = U_k^*$ $(k \in \Omega)$. Dann gilt $\forall k \in \Omega$:

$$U_k^* U_{\ominus k}^* = g(k)g(\ominus k) = g(k \ominus k) = g(0) = \mathbb{1}.$$

Daher ist U_k^* ein Isomorphismus, folglich auch U_k, und U_k^* sowie U_k sind unitäre Operatoren.[3]

Die definierende Bedingung kann daher äquivalent umgeformt werden:

$$\begin{aligned} U_k^*\gamma_m &= \gamma_{m\oplus k} \\ \Leftrightarrow (U_k^*)^{-1}\gamma_m &= \gamma_{m\ominus k} \\ \Leftrightarrow U_k\gamma_m &= \gamma_{m\ominus k}\end{aligned}$$

Es ist $U_k^* = U_{\ominus k}$. Genau wie im Fall von U_k^* gilt für alle $k, j \in \Omega : U_k U_j = U_{k\oplus j}$. □

Der Beweis gilt auch für abzählbares Ω, da die Endlichkeit von Ω nicht benötigt wurde.

Der im letzten Beweises eingeführte Isomorphismus g ist gleichzeitig ein Homomorphismus von der endlichen Gruppe Ω nach $GL(L_2(\Omega))$, wobei $L_2(\Omega)$ einfach als Vektorraum aufgefasst wird. Somit ist g eine Darstellung von Ω auf $L_2(\Omega)$. Genauer handelt es sich um eine Permutationsdarstellung. Mit $G := \Omega$, $S := \{\gamma_m | m \in \Omega\}$, Körper $F := \mathbb{C}$, $FS := L_2(\Omega)$ und einer Operation (von rechts) $S \times \Omega \to S$, $(\gamma_m, \sigma) \mapsto \gamma_m\sigma := \gamma_{m\oplus\sigma}$ entspricht diese Struktur folgender Definition [Dad71, 2.6]: „Let G act as permutations of a finite set S, with any $\sigma \in G$ taking each $s \in S$ into $s\sigma \in S$. Form the finite-dimensional vector space FS having S as a basis. Then any $\sigma \in G$ determines a unique linear transformation $R_S(\sigma)$ of FS satisfying

$$sR_S(\sigma) = s\sigma, \qquad \text{for all } s \in S.\text{“}$$

[3] Dies gilt schon, weil U_k^* entsprechend (2.4.1) die Basiselemente permutiert. Operatoren, die ein vollständiges Orthonormalsystem auf ein anderes abbilden, sind jedoch unitär.

Da $L_2(\Omega) \cong \mathbb{C}\Omega$ (Ω selbst also Basis ist), kann man g auch als reguläre Darstellung auffassen, in der $S = \Omega$ und $s\sigma = s \oplus \sigma$ $(s, \sigma \in \Omega)$. Da allerdings unterschiedliche Orthonormalbasen in $L_2(\Omega)$ von Bedeutung sind, scheint diese Sichtweise von geringerer Bedeutung zu sein.

Die Darstellungtheorie dient hauptsächlich dazu, Strukturen von Gruppen aufzuklären. Hier geht es jedoch umgekehrt darum, die gleiche Gruppenstruktur auf eine Basis von und unitäre Operatoren auf $L_2(\Omega)$ zu übertragen. Dennoch kann dieser Ansatz vielleicht nützlich zu einer Erweiterung des Teleportationsmodells sein.

In den nächsten Sätzen werden wichtige Fälle beschrieben, in denen das Zusammenspiel von unitären Operatoren und Orthonormalsystemen entsprechend Satz 2.4.1 zum Tragen kommt.

Korollar 2.4.2 *Gegeben sei die abelsche Gruppe $\Omega = \{0,1\}^n$ mit einer Addition $\oplus$, $(\Delta_m)_{m\in\Omega}$ die Einheitsbasis in $L_2(\Omega)$. Dann ist zu jedem $k \in \Omega$ genau ein unitärer Operator U_k auf $L_2(\Omega)$ definiert, so dass für alle $m \in \Omega$ gilt*

$$U_k^* \Delta_m = \Delta_{m\oplus k}$$

Für alle $f \in L_2(\Omega)$ und $j \in \Omega$ ist

$$U_k f(j) = f(j \oplus k)$$

BEWEIS: Die erste Aussage des Korollars ist eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 2.4.1. Weiter gilt für alle $j, k, m \in \Omega$:

$$\begin{aligned} U_k \Delta_m(j) &= \Delta_{m\ominus k}(j) \\ &= \delta_{m\ominus k,j} \\ &= \delta_{m,j\oplus k} \\ &= \Delta_m(j \oplus k) \end{aligned}$$

Für $f \in L_2(\Omega)$ ist daher $U_k f(j) = f(j \oplus k)$. $\square$

Sind zwei Gruppen Ω_1 und Ω_2 mit Additionen $+^n$ bzw. $+_n$ wie in Abschnitt 2.3 gegeben, so erhält man zwei unterschiedliche parametrisierte Gruppen unitärer Operatoren $(U_k)_{k\in\Omega}$ und $(U'_k)_{k\in\Omega}$. Sie permutieren die Basiselemente auf unterschiedliche Weise. Anders gesagt: Die Darstellung von Ω_1 bzw. Ω_2 auf $GL(L_2(\Omega_1)) = GL(L_2(\Omega_2))$ entspricht der Darstellung verschiedener (nicht disjunkter) 2^n-elementiger Teilmengen der Permutationsgruppe S_{2^n}.

Satz 2.4.3 *Sei $N \in \mathbb{N}$, $\Omega := \{0, ..., N-1\}$ mit Addition $\bmod N$. Eine Orthonormalbasis in $L_2(\Omega)$ ist dann gegeben durch $(b_m)_{m\in\Omega}$ mit*

$$b_m(j) := \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\big(\frac{2\pi i}{N} mj\big) \qquad (j \in \Omega)$$

Weiter sei eine parametrisierte Gruppe von Multiplikationsoperatoren $(\mathcal{O}_{\sqrt{N}b_k})_{k\in\Omega}$ auf $L_2(\Omega)$ definiert durch

$$\mathcal{O}^*_{\sqrt{N}b_k} b_m(j) := \sqrt{N} b_k b_m(j) \qquad (k, m, j \in \Omega)$$

Dann ist so für alle $k \in \Omega$ der nach Satz 2.4.1 eindeutig bestimmte unitäre Operator $\mathcal{O}_{\sqrt{N}b_k}$ gegeben mit der Eigenschaft

$$\mathcal{O}^*_{\sqrt{N}b_k} b_m = b_{m+k \bmod N} \qquad (m \in \Omega)$$

BEWEIS: Die Vektoren b_m bilden ein Orthonormalsystem, denn für alle $k, m \in \Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} < b_k \mid b_m > &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} \overline{\exp\big(\frac{2\pi i}{N} kj\big)} \exp\big(\frac{2\pi i}{N} mj\big) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} \exp\big(-\frac{2\pi i}{N} kj\big) \exp\big(\frac{2\pi i}{N} mj\big) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} \exp\big(\frac{2\pi i}{N} (m-k)j\big) \\ &= \delta_{km}, \end{aligned}$$

denn für $m = k$ ist $\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} \exp 0 = 1$. Sonst ist mit $q := \exp\big(\frac{2\pi i}{N}(m-k)\big)$:

$$< b_k \mid b_m > = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} q^j = \frac{1}{N} \frac{q^N - 1}{q - 1} = 0,$$

da q eine N-te Einheitswurzel ist.

Da $|\{b_m : m \in \Omega\}| = \dim L_2(\Omega)$, ist $(b_m)_{m\in\Omega}$ vollständig. Somit ist $(b_m)_{m\in\Omega}$ Orthonormalbasis in $L_2(\Omega)$.

Es ist für alle $k, m, j \in \Omega$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^*_{\sqrt{N}b_k} b_m(j) &= \sqrt{N} b_k b_m(j) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\big(\frac{2\pi i}{N} kj\big) \exp\big(\frac{2\pi i}{N} mj\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\big(\frac{2\pi i}{N} (k + m \bmod N) j\big) \\ &= b_{m+k \bmod N}(j) \end{aligned}$$

Die zu beweisende Eigenschaft aus Satz 2.4.1 ist also erfüllt, und daher sind die Operatoren $\mathcal{O}^*_{\sqrt{N}b_k}$ unitär. $\square$

Bemerkung 2.4.4 *In Qubit-Räumen gilt Satz 2.4.3 in folgender Abwandlung: Seien nach Abschnitt 2.3.2. die Gruppe $\Omega = \{0,1\}^n$ mit Addition $+_n$ definiert sowie eine Abbildung $d : \{0, ..., N-1\} \longrightarrow \{0,1\}^n$ mit $N = 2^n$. Eine Orthonormalbasis in $L_2(\Omega)$ sowie der entsprechende unitäre Operator $\mathcal{O}_{\sqrt{N}b_k}$ sind dann gegeben durch*

$$b_m(j) := \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\big(\frac{2\pi i}{N} d^{-1}(m) d^{-1}(j)\big) \qquad (m, j \in \Omega).$$

BEWEIS: d ist ein Isomorphismus. $\square$

Satz 2.4.5 *Seien $\Omega := \{0,1\}^n$ mit Addition $+^n$, $\epsilon = [\epsilon_1, ..., \epsilon_n]$, $k = [\kappa_1, ..., \kappa_n]$, $m = [\omega_1, ..., \omega_n] \in \Omega$, sowie $N := 2^n$. b_0, b_1 seien entsprechend Satz 2.4.3 definiert als Basiselemente von $L_2(\{0,1\})$:*

$$b_0(j) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ b_1(j) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^j \qquad (j \in \{0,1\})$$

Eine Orthonormalbasis in $L_2(\Omega)$ ist dann gegeben durch $(\tilde{b}_m)_{m\in\Omega}$ mit

$$\begin{aligned}\tilde{b}_m &:= \bigotimes_{j=1}^{n} b_{\omega_j},\ \text{d.h.}\\ \tilde{b}_m(\epsilon) &= \frac{1}{\sqrt{N}}(-1)^{\sum_{j=1}^{n}\omega_j\epsilon_j} \qquad (\epsilon \in \Omega).\end{aligned}$$

Weiter sei eine parametrisierte Gruppe von Multiplikationsoperatoren $(\widetilde{\mathcal{O}}_{\sqrt{N}\tilde{b}_k})_{k\in\Omega}$ auf Ω definiert durch

$$\widetilde{\mathcal{O}}^*_{\sqrt{N}\tilde{b}_k}\tilde{b}_m(\epsilon) := \sqrt{N}\tilde{b}_k\tilde{b}_m(\epsilon) \qquad (k, m, \epsilon \in \Omega)$$

Dann ist so für alle $k \in \Omega$ der nach Satz 2.4.1 eindeutig bestimmte unitäre Operator $\widetilde{\mathcal{O}}_{\sqrt{N}b_k}$ gegeben mit der Eigenschaft

$$\widetilde{\mathcal{O}}^*_{\sqrt{N}\tilde{b}_k}\tilde{b}_m = \tilde{b}_{m+^n k} \qquad (m \in \Omega).$$

BEWEIS: $(\widetilde{b}_m)_{m\in\Omega}$ ist Orthonormalbasis in $L_2(\{0,1\}^n) \cong \bigotimes_{m=1}^n L_2(\{0,1\})_m$, da durch das Tensorprodukt der Orthonormalbasen in $L_2(\{0,1\})_m$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\bigotimes_{m=1}^n L_2(\{0,1\})_m$ gegeben ist.

Weiter ist für alle $\epsilon, k, m \in \Omega$ erfüllt:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{O}}^*_{\sqrt{N}\tilde{b}_k}\tilde{b}_m(\epsilon) &= \frac{1}{\sqrt{N}}(-1)^{\sum_{j=1}^n \kappa_j\epsilon_j}(-1)^{\sum_{k=1}^n \omega_k\epsilon_k}\\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}(-1)^{\sum_{j=1}^n(\kappa_j+\omega_j)\epsilon_j}\\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}(-1)^{\sum_{j=1}^n(\kappa_j+\omega_j \bmod 2)\epsilon_j} \qquad (*)\\ &= \tilde{b}_{m+^n k}(\epsilon)\end{aligned}$$

$$(^*)\text{ gilt, da }\begin{cases}\kappa_j + \omega_j = \kappa_j + \omega_j \bmod 2 & \text{falls } \kappa_j + \omega_j = 0 \text{ oder } 1,\\ (-1)^{(\kappa_j+\omega_j)\epsilon_j} = (-1)^{2\epsilon_j} = & \\ (-1)^0 = (-1)^{(\kappa_j+\omega_j \bmod 2)\epsilon_j} & \text{falls } \kappa_j + \omega_j = 2.\end{cases}$$

Somit ist die Bedingung aus Satz 2.4.1 erfüllt: $\widetilde{O}^*_{\sqrt{N}b_k}\tilde{b}_m = \tilde{b}_{m+^n k}$. $\square$

2.5 Verschränkte Zustände

Definition 2.5.1 *Gegeben seien $\Omega = \{0,1\}^n$ sowie eine Orthonormalbasis $(\gamma_m)_{m\in\Omega}$ in $L_2(\Omega)$. Ein Operator J_γ ist dann wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned} &J_\gamma : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega) \otimes L_2(\Omega) \\ &J_\gamma f(m,r) := f(m)\gamma_m(r) \qquad (m, r \in \Omega,\ f \in L_2(\Omega)) \end{aligned}$$

Satz 2.5.2 *Der Operator J_γ ist eine Isometrie, d.h. er ist linear und $\|J_\gamma f\| = \|f\| (f \in L_2(\Omega))$.*

BEWEIS: J_γ ist linear, denn für $\lambda, \mu, k, m, r \in \Omega,\ f, g \in L_2(\Omega)$ ist

$$\begin{aligned} J_\gamma(\lambda f + \mu g)(m,r) &= (\lambda f(m) + \mu g(m))\gamma_m(r) \\ &= \lambda f(m)\gamma_m(r) + \mu g(m)\gamma_m(r) \\ &= \lambda J_\gamma f(m,r) + \mu J_\gamma g(m,r) \\ \text{Außerdem gilt } \|J_\gamma f\|^2 &= \int_\Omega \int_\Omega \overline{f(m)\gamma_m(r)} f(m)\gamma_m(r)\, d\mu^2(m,r) \\ &= \sum_{m\in\Omega} \sum_{r\in\Omega} \overline{f(m)\gamma_m(r)} f(m)\gamma_m(r) \\ &= \sum_{m\in\Omega} \left(\overline{f(m)} f(m) \sum_{r\in\Omega} \overline{\gamma_m(r)}\gamma_m(r) \right) \\ &= \sum_{m\in\Omega} \overline{f(m)} f(m) \|\gamma_m\|^2 \\ &= \|f\|^2, \qquad \text{da alle } \gamma_m \text{ Basiselemente sind.} \end{aligned}$$

Also ist J_γ eine Isometrie. □

Wesentlich für den physikalischen Vorgang der Teleportation sind **verschränkte Zustände** („entangled states“). Sie können mathematisch aus einem Zustand σ auf $L_2(\Omega)$ mittels der Isometrien J_γ und J_γ^* abgeleitet werden:

$$e_\gamma(\sigma) := J_\gamma \sigma J_\gamma^* \tag{2.5.1}$$

Zu einem reinen Zustand $\sigma = |\, f >< f|$ auf $L_2(\Omega)$ ist nach Lemma 1.1.6 der verschränkte Zustand auf $L_2(\Omega) \otimes L_2(\Omega)$:

$$e_\gamma(\sigma) = |\, J_\gamma f >< J_\gamma f|\,. \tag{2.5.2}$$

Beispiel: Sei $(\Delta_m)_{m\in\Omega}$ die orthonormale Standardbasis in $L_2(\Omega)$, und ein reiner Zustand sei gegeben durch

$$\sigma := |\, \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{m=1}^{|\Omega|} \Delta_m >< \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{m=1}^{|\Omega|} \Delta_m| \;=: |\, \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{m=1}^{|\Omega|} \Delta_m >< ...|$$

(Letzteres ist eine abkürzende Schreibweise eines Projektors.) Dieser Zustand entspricht einer diskreten Gleichverteilung der Eigenwerte eines passenden Operators:

Die Fourierkoeffizienten c_m des Zustandsvektors $\frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\sum_{m=1}^{|\Omega|}\Delta_m$ sind $\frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$ für alle m. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, einen zu Δ_m gehörenden Eigenwert zu messen, jeweils $|c_m|^2 = \frac{1}{|\Omega|}$. σ enthält somit keine konkrete Information. Ist e_Δ mit der gleichen Orthonormalbasis konstruiert, bezüglich der σ gegeben ist, so ergibt sich folgender elementarer Fall (s. auch 2.6.3):

$$e_\Delta(\sigma) = |\,\frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\sum_{m=1}^{|\Omega|}\Delta_m \otimes \Delta_m >< ...| \tag{2.5.3}$$

2.6 Orthonormalbasen in $\mathbf{L_2}(\boldsymbol{\Omega}) \otimes \mathbf{L_2}(\boldsymbol{\Omega})$

Satz 2.6.1 *Es seien $\Omega = \{0,1\}^n$, $(\gamma_m)_{m\in\Omega}$, $(\tau_m)_{m\in\Omega}$ Orthonormalbasen in $L_2(\Omega)$ und $(U_k)_{k\in\Omega}$ eine parametrisierte Gruppe unitärer Operatoren auf $L_2(\Omega)$, die bezüglich $(\gamma_m)_{m\in\Omega}$ Bedingung 2.4.1 aus Satz 2.4.1 genügt. Es sei*

$$\begin{aligned} \xi_{kl} &:= (\mathbb{1} \otimes U_l) J_\gamma \tau_k, && \textit{d.h.} \\ \xi_{kl}(m,r) &= \tau_k(m)\gamma_{m\ominus l}(r) && (k,l,m,r \in \Omega). \end{aligned}$$

Dann ist $(\xi_{kl})_{k,l\in\Omega}$ Orthonormalbasis in $L_2(\Omega) \otimes L_2(\Omega)$.

BEWEIS: Da $L_2(\Omega) \otimes L_2(\Omega) = L_2(\Omega \times \Omega)$, ist

$$\begin{aligned} <\xi_{ij}\,|\,\xi_{kl}> &= \int_\Omega \int_\Omega \overline{\xi_{ij}(m,r)}\,\xi_{kl}(mr)\,d\mu^2(m,r) \\ &= \sum_{m\in\Omega}\sum_{r\in\Omega} \overline{\xi_{ij}(m,r)}\,\xi_{kl}(m,r) \\ &= \sum_{m\in\Omega}\sum_{r\in\Omega} \overline{\tau_i(m)\gamma_{m\ominus j}(r)}\,\tau_k(m)\gamma_{m\ominus l}(r) \\ &= \sum_{m\in\Omega}\Big(\overline{\tau_i(m)}\tau_k(m)\sum_{r\in\Omega}\overline{\gamma_{m\ominus j}(r)}\gamma_{m\ominus l}(r)\Big) \\ &= \sum_{m\in\Omega}\Big(\overline{\tau_i(m)}\tau_k(m) <\gamma_{m\ominus j}\,|\,\gamma_{m\ominus l}>\Big) \\ &= \sum_{m\in\Omega}\overline{\tau_i(m)}\tau_k(m)\,\delta_{jl} \\ &= \delta_{jl} <\tau_i\,|\,\tau_k> \\ &= \delta_{ik}\delta_{jl} \end{aligned}$$

Also ist $(\xi_{kl})_{k,l\in\Omega}$ ein Orthonormalsystem. Da es $|\Omega|^2 = \dim L_2(\Omega\times\Omega)$ Elemente enthält, ist es vollständig. □

Korollar 2.6.2 *Gegeben seien $\Omega = \{0,1\}^n$ sowie 2 Paare von Orthonormalbasen und parametrisierten Gruppen unitärer Operatoren in $L_2(\Omega)$, die Bedingung 2.4.1 aus Satz 2.4.1 genügen: $(\gamma_m)_{m\in\Omega},\ (U_k)_{k\in\Omega}$ sowie $(\tau_m)_{m\in\Omega},\ (V_k)_{k\in\Omega}$. Für alle $k,l\in\Omega$ sei definiert (0 bezeichne das neutrale Element in Ω)*

$$\xi_{kl} := (V_k \otimes U_l) J_\gamma \tau_0.$$

Dann ist $(\xi_{kl})_{k,l\in\Omega}$ *Orthonormalbasis in* $L_2(\Omega)\otimes L_2(\Omega)$.

BEWEIS: $(\tau_{\ominus m})_{m\in\Omega}$ ist Orthonormalbasis in $L_2(\Omega)$, da gegenüber $(\tau_m)_{m\in\Omega}$ nur die Basiselemente umindiziert sind. Mit $\xi'_{kl} = (\mathbb{1}\otimes U_l)J_\gamma\tau_{\ominus k}$ ist nach Satz 2.6.1 $(\xi'_{kl})_{k,l\in\Omega}$ Orthonormalbasis in $L_2(\Omega)\otimes L_2(\Omega)$. Dann ist in diesem Raum auch $(\xi_{kl})_{k,l\in\Omega}$ ein vollständiges Orthonormalsystem, denn

$$\begin{aligned}\forall\, k,l,m,r\in\Omega:\ \xi'_{kl}(m,r) &= \tau_{\ominus k}(m)\gamma_{m\ominus l}(r)\\ &= (V_k\tau_0(m))(U_l\gamma_m(r))\\ &= (V_k\otimes U_l)J_\gamma\tau_0(m,r)\\ &= \xi_{kl}(m,r).\ \square\end{aligned}$$

Beispiel: In $\Omega=\{0,1\}$ sind Basiselemente:

$$\xi_{kl} := (\mathcal{O}_{\sqrt{N}b_k}\otimes U_l)J_\Delta b_0 \qquad (k,l\in\{0,1\}) \tag{2.6.1}$$

$\mathcal{O}_{\sqrt{N}b_k}, U_l$ und $\{b_0,b_1\}$ sind dabei wie in Abschnitt 2.4 gegeben. Für $m,r\in\{0,1\}$ ist also z.B.

$$\begin{aligned}\xi_{00}(m,r) &= (\mathcal{O}_{\sqrt{N}b_0}\otimes U_0)J_\Delta b_0(m,r)\\ &= J_\Delta b_0(m,r)\\ &= b_0(m)\Delta_m(r)\\ &= \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } m=r,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_0\otimes\Delta_0+\Delta_1\otimes\Delta_1)(m,r)\end{aligned}$$

Geht es speziell um Spin-$\frac{1}{2}$-Partikel, so schreibt man oft Δ_0 als $|\uparrow>$, Δ_1 als $|\downarrow>$. Legt man diese Basis in jedem der beiden 1-Partikel-Räume $L_2(\{0,1\})$ zugrunde, indiziert entsprechend und notiert das Tensorprodukt wie in (2.1.2), so erhält man mit Rechnungen wie für ξ_{00} die „Bell-Basis“ der ersten Formulierung eines Teleportationsmodells [BB+93, 1896]:

$$\begin{aligned}\xi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1>|\uparrow_2> + |\downarrow_1>|\downarrow_2>)\\ \xi_{01} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1>|\downarrow_2> + |\downarrow_1>|\uparrow_2>)\\ \xi_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1>|\uparrow_2> - |\downarrow_1>|\downarrow_2>)\\ \xi_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1>|\downarrow_2> - |\downarrow_1>|\uparrow_2>)\end{aligned} \tag{2.6.2}$$

[BB+93, 1896a, 1897b] $|\xi_{11}><\xi_{11}|$ ist gleichzeitig der „klassische“ Fall eines verschränkten Spin-Zustands; er wird EPR-Singulett-Zustand genannt. Ebenfalls sind „maximal“ verschränkt und erfüllen die gleiche Funktion in Teleportationsmodellen alle Zustandsvektoren, die aus dem Singulett-Zustand durch zwei unitäre Operationen jeweils auf einem der beiden 1-Partikel-Räume ableitbar sind. Sie können in folgender Form notiert werden:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0 \otimes \tau_0 + \gamma_1 \otimes \tau_1), \tag{2.6.3}$$

wobei $(\gamma_m)_{m\in\{0,1\}}$ und $(\tau_m)_{m\in\{0,1\}}$ Orthonormalbasen in $L_2(\{0,1\})$ sind. Diese Form haben auch der Zustandsvektor des elementaren Beispiels für einen verschränkten Zustand (2.5.3) sowie - in $L_2(\mathbb{R})$ - die Zustandsvektoren (0.0.1) und (0.0.2) aus [EPR35].

Kapitel 3

Ein verallgemeinertes Teleportationsmodell

3.1 Ein Modell für das Quantenphänomen Teleportation

[FO01, 230f.] Es werden alle Bezeichnungen aus dem letzten Kapitel übernommen. Mit $N = n^2$ ist zunächst ein N^3-dimensionaler Hilbertraum

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3, \qquad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3 = L_2(\{0,1\}^n)$$

gegeben. Eine Beobachterin Alice kann Zustände auf $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ manipulieren, Bob auf $\mathcal{H}_3$, d.h. sie können Mess- oder unitäre Operatoren darauf anwenden; Alice kann außerdem Teilchen in einem bestimmten Zustand ρ herstellen (genauer gesagt führen sie natürlich die so mathematisch beschriebenen Aktionen aus). Grundlegend für die Teleportation ist ein verschränkter Zustand $e_\gamma(\sigma) = J_\gamma \sigma J_\gamma^*$ entsprechend (2.5.1) auf $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$.

Will Alice den Zustand ρ auf $\mathcal{H}_1$ zu Bob übertragen, führt sie auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ eine Messung aus gemäß

$$F := \sum_{n,m=1}^{N} z_{nm} F_{nm} \qquad (z_{nm} \in \mathbb{R}, F_{nm} := |\,\xi_{nm} >< \xi_{nm}|\,). \tag{3.1.1}$$

Die Eigenwerte z_{nm} seien paarweise verschieden. Dann bilden die Projektoren $(F_{nm})_{n,m=1}^N$ einen „vollständigen Satz verträglicher Observabler“ [Fic68, 3.4 §1], d.h. durch die Messung entsprechend F wird der Zustand auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ vollständig bestimmt. Neben der Definition des verschränkten Zustands $e_\gamma(\sigma)$ ist diejenige der Projektoren F_{nm} das wichtigste Mittel, um das Modell an unterschiedliche Fragestellungen anzupassen. Dafür wird eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ entsprechend Satz 2.6.1 bzw. Korollar 2.6.2 ausgewählt.

Alice's Messung bedeutet für das gesamte System, das sich im Zustand $\rho \otimes e_\gamma(\sigma)$ auf $\mathcal{H}$ befindet, eine Messung entsprechend $F \otimes \mathbb{1}$. Gemäß dem von Neumannschen Messpostulat nimmt das System nach der Messung eines Eigenwerts z_{nm} den Zustand an:

$$\rho_{nm}^{123} = \frac{(F_{nm} \otimes \mathbb{1})\,\rho \otimes e_\gamma(\sigma)\,(F_{nm} \otimes \mathbb{1})}{\mathrm{tr}_{123}(F_{nm} \otimes \mathbb{1})\,\rho \otimes e_\gamma(\sigma)\,(F_{nm} \otimes \mathbb{1})} \tag{3.1.2}$$

Durch Alice's Messung (für die sie den gleichen Typ von „beam splitter"[1] benutzen kann wie zur Erzeugung des verschränkten Zustands auf $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$) wird eine weitere Verschränkung hergestellt, nun zwischen ρ und $e_\gamma(\sigma)$ (im Fall eines EPR-Paars s. [BB+93, 1896b]). Gleichzeitig wird der - i.A. keine Information enthaltende - Zustand auf $\mathcal{H}_3$ zu

$$\begin{aligned}\Lambda_{nm}(\rho) &= \operatorname{tr}_{12} \rho_{nm}^{123} \\ &= \operatorname{tr}_{12} \frac{(F_{nm} \otimes \mathbb{1})\, \rho \otimes e_\gamma(\sigma)\, (F_{nm} \otimes \mathbb{1})}{\operatorname{tr}_{123}(F_{nm} \otimes \mathbb{1})\, \rho \otimes e_\gamma(\sigma)\, (F_{nm} \otimes \mathbb{1})}\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Denn interessiert man sich für den Erwartungswert[2] einer Messung des durch ρ_{nm}^{123} beschriebenen Systems entsprechend einem selbstadjungierten Operator A auf $\mathcal{H}_3$, d.h. dem Operator $\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes A$ auf $\mathcal{H}$, so gilt

$$\begin{aligned}E_{\rho_{nm}^{123}}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes A) &= \operatorname{tr}_{123}\left(\rho_{nm}^{123}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes A)\right) \\ &= \operatorname{tr}_3(\Lambda_{nm}(\rho) A) \\ &= E_{\Lambda_{nm}(\rho)}(A),\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

wegen folgendem

Satz 3.1.1 *Gegeben seien ein endlichdimensionaler Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ und ein lineares, positives und normiertes Funktional ω auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Dann existiert genau ein positiver Operator $\hat{\rho}$ mit $\operatorname{tr} \hat{\rho} = 1$ auf $\mathcal{H}''$, so dass gilt:*

$$\omega(\mathbb{1} \otimes A) = \operatorname{tr}(\hat{\rho} A) \qquad (A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}''))$$

BEWEIS: Da ω nur von A abhängt, kann es als Funktional ω'' auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H}'')$ aufgefasst werden. Linearität, Positivität und Normierung sind dann offensichtlich ebenfalls gegeben. ω'' ist also ein Zustand auf $\mathfrak{L}(\mathcal{H}'')$ entsprechend Definition 1.2.1. Dieser ist für endlichdimensionale Hilberträume immer normal. Nach (1.2.2) impliziert dies gerade die Behauptung. □

In unserem Fall sind $\mathcal{H}$' gegeben durch $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}''$ durch $\mathcal{H}_3$, ω durch $E_{\rho_{nm}^{123}}$, $\mathbb{1}$ durch $\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ und $\hat{\rho}$ durch $\operatorname{tr}_{12} \rho_{nm}^{123}$.

Satz 3.1.1 gilt auch in unendlichdimensionalen separablen Hilberträumen, für einen normalen Zustand ω und einen Spuroperator $\hat{\rho}$. Da die Normalität von ω äquivalent zur σ-schwachen Stetigkeit ist [BR87, Theorem 2.4.21], ist dann im Wesentlichen nur nachzuweisen, dass die Stetigkeit sich von ω auf ω'' überträgt.

In [AO99, 36] wird ein **Kanal** als eine bestimmte Abbildung zwischen den konvexen Mengen der Zustände (nach Definition 1.2.1 als Funktional betrachtet) auf zwei C^*-Algebren definiert; der Begriff kann auch auf allgemeine *-Algebren erweitert werden. Kanäle spielen eine wichtige Rolle in einem sehr weiten - in der klassischen wie

[1] Physikalisch - im Fall von Bosonen - etwa ein halbdurchlässiger Spiegel. In [Deu01, 51 u. 58] wird ein wichtiger Fall eines verschränkten Zustands beschrieben: ein Paar niederenergetischer, gleichfrequenter Photonen, das in einem "nichtlinearen Kristall" aus einem höherenergetischen Photon entstehen kann. Zum mathematischen Ausdruck des beam splitting s. [FO01, 231f. u. 235] sowie [FFL98] und [AO99] (allgemeiner Ansatz zur Beschreibung von optischer Kommunikation und Quantenmessungen).

[2] Es sei an die Entsprechung der Definitionen eines Zustands als Spuroperator und als Funktional erinnert - s. S. 16.

der Quantenphysik anwendbaren - Ansatz zur Beschreibung des Messprozesses wie der Signalübertragung. Eine solche ist auch Teleportation, und $\Lambda_{nm}(\rho)$ ist ein Kanal von der Menge der Input-Zustände (nun wieder als positive Operatoren mit Spur 1 aufgefasst) auf $\mathcal{H}_1$ in die Menge der Output-Zustände auf $\mathcal{H}_3$. (3.1.3) bzw. (3.1.4) stellen außerdem eine Analogie zur Randverteilung in der klassischen Stochastik dar.

Eine idealtypische, **perfekte Teleportation** bezüglich einer bestimmten Klasse $\mathcal{S}$ von Zuständen ρ auf $\mathcal{H}_1$ liegt vor, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(E1) Für jedes Paar n, m existiert ein unitärer Operator $v_{nm} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_3$, so dass

$$\Lambda_{nm}(\rho) = v_{nm}\rho\, v_{nm}^* \qquad (\rho \in \mathcal{S}).$$

(E2) Für die Wahrscheinlichkeiten $p_{nm}(\rho)$ der Messwerte z_{nm}, also den Nenner in (3.1.2), gilt:

$$\sum_{nm} p_{nm}(\rho) = 1 \qquad (\rho \in \mathcal{S}).$$

(E1) bedeutet, dass der Zustand im Bereich Bobs unitär äquivalent zu Alice's ursprünglichem Zustand ρ ist, also in einer einfachen, reversiblen Transformation vorliegt. Teilt Alice Bob ihr Messergebis mit, so kann Bob den entsprechenden „unitären Schlüssel“ v_{nm} auf $\Lambda_{nm}(\rho)$ anwenden: $v_{nm}^*\Lambda_{nm}(\rho)\, v_{nm} = \rho$. Im einfachen Fall eines teleportierten Spinzustands bedeutet dies eine Rotation des Spin um die $x-$, $y-$ oder $z-$Achse oder die identische Transformation. (E2) besagt, dass Bob den richtigen Schlüssel mit Sicherheit findet. Damit ist die Teleportation vollendet.

Eine solche perfekte Teleportation wird in [FO01, 2.] beschrieben (übertragen auf kohärente Zustände[3] von Bosonen-Systemen). Dort sind zugrunde gelegt, ähnlich in [FFO01]:

1. $\Omega := \{0, 1, ..., N-1\}$, $\oplus := +_n$ (Addition $\bmod N$)
2. Orthonormalbasis $(\Delta_m)_{m\in\Omega}$ entsprechend Korollar 2.4.2
3. Orthonormalbasis $(b_m)_{m\in\Omega}$ mit $b_m(j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(\frac{2\pi i}{N} mj)$ entsprechend Satz 2.4.3
4. $\sigma := |\, b_0 >< b_0| \,= |\, \frac{1}{\sqrt{N}} >< \frac{1}{\sqrt{N}}|$. Der verschränkte Zustand ist dann (s. (2.5.2) und (2.6.2))
$$e_\Delta(\sigma) = |\, J_\Delta b_0 >< J_\Delta b_0| \,= |\, \xi_{00} >< \xi_{00}|$$
5. $U_k f(j) = f(j \oplus k)$ - s. Korollar 2.4.2

[3] Hier sei nur ihre mathematische Definition [FO01, Definition 1.2] im symmetrischen Fockraum $\mathcal{M} = L_2(M, \mathfrak{M}, F_\mu)$ angegeben (Bezeichnungen wie in Abschnitt 1.3.3): Zu einer gegebenen Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ ist der Exponentialvektor $\exp(g) : M \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\exp(g)(\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{für } \varphi = 0, \\ \prod_{x\in G, \varphi(\{x\})>0} g(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt: $\exp(g) \in \mathcal{M} \Leftrightarrow g \in L_2(G)$. In diesem Fall wird der Projektor $|\exp(g) >< \exp(g)|$ auf den normierten Vektor $|\exp(g)> = e^{-\frac{1}{2}\|g\|^2} \exp(g)$ kohärenter Zustand zu g genannt. Die lineare Hülle der Exponentialvektoren ist dicht in $\mathcal{M}$.

6. Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ nach Korollar 2.6.2: $(\xi_{kl})_{k,l\in\Omega}$ mit
$$\xi_{kl} = (\mathcal{O}_{\sqrt{N}b_k} \otimes U_l) J_\Delta b_0$$

Damit ergibt sich [FO01, Theorem 2.2.]:
$$\Lambda_{nm}(\rho) = U_m \mathcal{O}^*_{\sqrt{N}b_n} \rho\, \mathcal{O}_{\sqrt{N}b_n} U^*_m \tag{3.1.5}$$

3.2 Teleportation und Genexpression

Zum Schluss soll darauf hingewiesen werden, an welchen Stellen im Modell die für die Genetik typischen Zahlen auftreten können. Zugrunde gelegt wird $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ mit $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3 = L_2(\{0,1\})^{3\otimes}$, also das dreifache Tensorprodukt des 3-Qubit-Raums. Entsprechend Folgerung 1 aus Satz 2.2.1 hat der symmetrische Raum $L_2(\{0,1\})^{3\otimes}_{\text{sym}}$ die Dimension $n = 4$, entsprechend der Anzahl von Buchstaben des genetischen Code. Wählt man $k = 3$ Elemente aus einem vollständigen Orthonormalsystem in diesem Raum aus, mit Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, so ist die Anzahl der Kombinationen 20, nach der Formel
$$^{w}C_n^k = \binom{n+k-1}{k} \tag{3.2.1}$$

Auf diese Weise können 2 Klassen von je 20 Zuständen auf $L_2(\{0,1\})^{3\otimes}_{\text{sym}} \subset \mathcal{H}_3$ definiert werden - der Output in einem Schritt des Prozesses der Genexpression ist eine von 20 Aminosäuren. Vorausgesetzt wird also, dass auf $\mathcal{H}_3$ nur symmetrische Zustände von Bedeutung sind. Jedenfalls steht nur die Algebra der (Mess-)Operatoren auf dem symmetrischen Teilraum zur Verfügung.[4]

Mit der Orthonormalbasis $(\beta_j^3)_{j=0\ldots3}$ entsprechend Satz 2.2.1 ist eine Klasse von reinen Zuständen auf $\mathcal{H}_3$:
$$\mathcal{S}_1 := \left\{ \Big| \frac{1}{\|\sum_{k=1}^3 \alpha_k\|} \sum_{k=1}^{3} \alpha_k > < \ldots \Big| \;\middle|\; \alpha_k \in \{\beta_j^3 |\, j = 0, \ldots, 3\} \right\} \tag{3.2.2}$$

Da diese Zustände durch die Auswahl dreier beliebiger α_k aus der 4-elementigen Orthonormalbasis $(\beta_j^3)_{j=0\ldots3}$ eindeutig bestimmt sind und in deren Linearkombination die Reihenfolge keine Rolle spielt, ist $|\mathcal{S}_1| = {}^{w}C_4^3 = 20$.

Durch den Faktor $\frac{1}{\|\sum_{k=1}^3 \alpha_k\|}$ wird die Norm jedes Vektors und damit die Spur des entsprechenden Projektors 1; es sind also tatsächlich Zustände definiert. Wegen der Orthogonalität der Basiselemente berechnet sich der Normierungsfaktor wie folgt ($j, k, l \in \{1, 2, 3\}$):

α_k	$\|\sum_{k=1}^3 \alpha_k\|^2$	Faktor	Anzahl Zustände
verschieden	$\sum_{k=1}^3 \|\alpha_k\|^2$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\binom{4}{3} = 4$
2 gleich	$\|2\alpha_j\|^2 + \|\alpha_l\|^2$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 12$
3 gleich	$\|3\alpha_j\|^2$	$\frac{1}{3}$	$\binom{4}{1} = 4$

[4]Werden zukünftige Fortschritte der Genetik „feinere“ Messungen möglich machen und so Impulse zu einer Entwicklung des Modells geben?

Eine weitere Klasse von im Allgemeinen gemischten Zuständen ist

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{3} |\, \alpha_k >< \alpha_k | \;\middle|\; \alpha_k \in \{\beta_j^3 |\, j = 0, ..., 3\} \right\} \tag{3.2.3}$$

Gegenüber der kohärenten Superposition von Zuständen im 1. Fall sind hier Zustände durch klassische Wahrscheinlichkeiten gleich gewichtet. Ist jedoch $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, so liegt ein reiner Zustand $|\, \beta_j^3 >< \beta_j^3 | \;\in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ vor. Offensichtlich gilt wieder $|\mathcal{S}_2| = 20$, und es gibt je 4 Zustände mit gleichen bzw. paarweise verschiedenen α_k sowie 12 mit genau 2 gleichen α_k.

Die Zahl 64 (unterschiedliche Triplets des genetischen Code) ist die Dimension von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ und daher die Anzahl der eindimensionalen Messoperatoren F_{nm} sowie der Kanäle Λ_{nm}.

Schließlich kann man auch 20 verschiedene Input-Zustände ρ annehmen, von der gleichen Klasse wie die Output-Zustände. Im hier erläuterten Modell ist jeder Kanal unitär und damit eine bijektive Abbildung. Das Muster der Zuordnung: Teilmengen von Messoperatoren / Kanälen - Output-Zustände wird also in Abhängigkeit von ρ permutiert. (Dass es sich dabei gerade um die 20 möglichen zyklischen Permutationen der Output-Zustände handelt, ist wohl eine zu große Einschänkung des Modells). So kann die Hypothese aufgestellt werden, dass die Produktion von Aminosäuren wieder durch die Auswahl einer von 20 Aminosäuren beeinflusst wird (oder einem Objekt, das ebenfalls durch $\rho \in \mathcal{S}_1$ bzw. $\rho \in \mathcal{S}_2$ beschrieben werden kann).

Neben einer mathematischen Weiterentwicklung des vorgestellten Ansatzes müsste etwa experimentell überprüft werden, wie ein Input-Zustand realisiert ist - vielleicht als Aminosäure, die an das den genetischen Code lesende Ribosom gekoppelt ist? Könnten die angeschnittenen Fragen - nachdem mathematische Methoden immer stärkeren Eingang in die Biologie finden - ein weiteres Gebiet der Zusammenarbeit von Mathematikern und Biologen darstellen?

NACHBEMERKUNG: Nicht behauptet wird die sehr spekulative, jedoch besonders spannende These, das physikalische Phänomen Teleportation habe einen Einfluss auf genetische Prozesse. Jedoch halte ich am zugrunde liegenden verschränkten Zustand die Idee eines Zusammenhangs für bemerkenswert, der über die durch Partikel vermittelten Wechselwirkungen (starke und schwache Kernkraft, Elektromagnetismus und Gravitation) hinausgeht. Zwei verschränkte Teilchen sind mehr als die Summe zweier einzelner. Hier gibt es eine Brücke zum systemischen, ganzheitlichen Denken, das neben dem analytischen besonders in Biologie, Medizin wie auch in Geistes- und Gesellschaftswissenschaften von Bedeutung ist.

> *„Ein Ganzes hat Teile oder Komponenten, denen gegenüber es eine gewisse Selbständigkeit bewahren muß, sonst ist es kein Ganzes, sondern eine Summe. Seine Konfiguration ermöglicht Spielraum, in welchem Komponenten sei es ausfallen können oder ersetzbar sind. Für die Aufklärung der für einen derartigen Spielraum maßgebenden Bindekräfte wird der Quantenbiologie besondere Bedeutung zukommen... Gelingt es, in das Zusammenspiel der spezifischen Bindekräfte des Plasmas weiter einzudringen, auf denen die Regulationsfähigkeit, d.h. die Suprematie des Ganzen über seine Teile, beruht, so kommt ein Weg in Sicht, der nicht etwa zum Sieg des Mechanismus über die Teleologie - ihr heuristischer Wert bleibt in jedem Fall auch dann gesichert -, sondern zur Aufhebung beider aneinander führt. Hat sich einmal ein System gebildet, so sind ihm Eigenschaften zugefallen, welche seine Position verändern. Diese Veränderung besteht, unbeschadet ihrer physikalischen und chemischen Natur, in einem Zuwachs an Positionalität[5], d.h. einer immateriellen Dimension, die wir im Blick haben, wenn wir einem Körper Leben zusprechen.“ [Ple76, 92 u. 99]*

[5]Unter Positionalität wird das Maß verstanden, in dem sich ein Lebewesen als Einheit von der Umwelt abgrenzt (und dabei im Austausch mit ihr steht). Der Mensch besitzt ”exzentrische Positionalität“, er kann aus seinem Zentrum heraustreten, sich selbst reflektieren, hat Bewusstsein.

Literaturverzeichnis

[AO99] L. Accardi and M. Ohya. Compound channels, transition expectations, and liftings. *Appl Math Optim*, 39:33–59, 1999.

[BB+93] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, 70(13):1895–1899, 29th March 1993.

[Bel64] J. S. Bell. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, 1:195 ff., 1964.

[BR87] Ola Bratteli and Derek W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, volume 1. Springer, New York, 2nd edition, 1987.

[BR96] Ola Bratteli and Derek W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, volume 2. Springer, New York, 2nd edition, 1996.

[CW97] Scott H. Clearwater and Colin P. Williams. *Explorations in quantum computing*. Springer, New York, 1997.

[Dad71] E. C. Dade. *Character Theory Pertaining to Finite Simple Groups*, volume M.B. Powell and G. Higman, Finite Simple Groups, chapter VIII, pages 249 – 327. Academic Press, London / New York, 1971.

[Deu01] Deutsche Physikalische Gesellschaft, editor. *Physik - Themen, Bedeutung und Perspektiven physikalischer Forschung: Denkschrift zum Jahr der Physik*. Bad Honnef, 3rd edition, 2001.

[EPR35] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47, 1935.

[FF86] K.-H. Fichtner and W. Freudenberg. Point processes and normal states of boson systems. Preprint NTZ Leipzig, 1986.

[FF87] K.-H. Fichtner and W. Freudenberg. Point processes and the position distribution of infinite boson systems. *J. Stat. Phys.*, 47:959–978, 1987.

[FF91] K.-H. Fichtner and W. Freudenberg. Characterization of states of infinite boson systems. *Commun. Math. Phys.*, 137:315–357, 1991.

[FFL98] K.-H. Fichtner, W. Freudenberg, and V. Liebscher. Time evolution and invariance of boson systems given by beam splittings. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 1(4):511–531, 1998.

[FFL99] K.-H. Fichtner, W. Freudenberg, and V. Liebscher. On exchange mechanisms for bosons. Wird veröffentlicht in: Proceedings of workshop on Quantum Probability, Cottbus. Preprint, 1999.

[FFO01] Karl-Heinz Fichtner, Wolfgang Freudenberg, and Masanori Ohya. Generalized teleportation channels. Wird veröffentlicht in: Proceedings of workshop on Quantum Probability, Cottbus. Preprint, 2001.

[Fic68] Eugen Fick. *Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie*. Geest & Portig, Leipzig, 2nd edition, 1968.

[Fic00] Karl-Heinz Fichtner. Quantenstochastik, 2000. Seminare Universität Jena SS 2000 + WS 2000/01.

[Fic01] Karl-Heinz Fichtner. Teleportation und beam splitting, 2001. Vorlesung Universität Jena SS 2001.

[Fic02] Karl-Heinz Fichtner. Brain models. Unveröffentlicht, 2002.

[FO01] Karl-Heinz Fichtner and Masanori Ohya. Quantum teleportation with entangled states given by beam splittings. *Comm. Math. Phys.*, 222:229–247, 2001.

[Hen85] Ernst Henze. *Einführung in die Maßtheorie*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 2nd edition, 1985.

[HGF+02] Bing Hao, Weimin Gong, Tsuneo K. Ferguson, Carey M. James, Joseph A. Krzycki, and Michael K. Chan. A new UAG-encoded residue in the structure of a methanogen methyltransferase. *Science*, 296(5572):1462–1466, 24th May 2002.

[HS71] Friedrich Hirzebruch and Winfried Scharlau. *Einführung in die Funktionalanalysis*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971.

[KA82] L. Kantorovich and G. Akilov. *Functional Analysis*. Pergamon Press, Oxford, 2nd edition, 1982.

[Knö02] Ludwig Knöll. Quantenmechanik, 2002. Vorlesung Universität Jena WS 2001/02.

[Mat98] Martin Mathieu. *Funktionalanalysis: Ein Arbeitsbuch*. Spektrum Akad. Verl., Heidelberg, 1998.

[MKM74] K. Matthes, J. Kerstan, and J. Mecke. *Unbegrenzt teilbare Punktprozesse*. Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

[Par92] Kalyanapuram R. Parthasarathy. *An introduction to quantum stochastic calculus*. Birkhäuser, Basel, 1992.

[Pen91] Roger Penrose. *Computerdenken: Die Debatte um künstliche Intelligenz, Bewusstsein und die Gesetze der Physik*. Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg, 1991.

[Ple76] Helmuth Plessner. *Die Frage nach der Condition humana. Aufsätze zur philosophischen Anthropologie*. suhrkamp taschenbuch 361, 1976.

[Sak94] Jun John Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley, Reading/ Massachusetts, 1994.

[Tri80] Hans Triebel. *Höhere Analysis*. Deutsch, 2nd edition, 1980.

...